

Untersuchungen zur Phasenstruktur Abelscher Higgsmodelle
in der Gittereichtheorie

Dissertation
der Fakultät für Physik
der Ludwig-Maximilians-Universität
München

vorgelegt von
Florian Nill
aus Augsburg



Untersuchungen zur Phasenstruktur Abelscher Higgsmodelle
in der Gittereichtheorie

Dissertation

der Fakultät für Physik

der Ludwig-Maximilians-Universität

München

vorgelegt von

Florian Nill

aus Augsburg

München, 11. Mai 1987

1. Gutachter: Professor Dr. H.P. Dürr

2. Gutachter: Professor Dr. H. Spohn

Betreuer: Dr. E. Seiler

Tag der mündlichen Prüfung:

ZUSAMMENFASSUNG

In der vorliegenden Dissertationsschrift untersuche ich die Phasenstruktur abelscher Higgsmodelle in der Gittereichtheorie. Besondere Berücksichtigung gilt hierbei der spontanen Symmetriebrechung, der Massenerzeugung, dem Meissner-effekt sowie schließlich einer eichinvarianten Bestimmung der Ordnung des Higgs-Phasenübergangs.

Nach einem einführenden Kapitel über abelsche Higgsmodelle betrachte ich im zweiten Kapitel das nicht-kompakte Modell (d.h. mit Eichgruppe $\mathbb{R}$). Ich gebe eine zumindest qualitativ vollständige analytische Beschreibung der Parameterbereiche für die Higgs- und die Coulombphase an, wobei die erste durch einen massiven und die zweite durch einen masselosen (transversalen) Photonpropagator gekennzeichnet ist. Weiter zeige ich, daß der Higgserwartungswert hierfür nur in Landau-Eichung als Ordnungsparameter dient, während er (in $d \leq 4$ Dimensionen) in allen anderen kovarianten α -Eichungen immer - d.h. auch in der Higgsphase - gleich Null ist. Schließlich untersuche ich auch die magnetischen Eigenschaften des Modells und zeige, daß in der Higgsphase der Meissnereffekt auftritt, daß magnetische Vortexlinien exponentiell unterdrückt sind (in $d = 3$) und daß der 't Hooft-Loop dem Flächengesetz folgt (in $d = 4$).

Im dritten Kapitel führe ich im kompakten Modell (d.h. mit Eichgruppe $U(1)$) eine mathematisch strenge Untersuchung des Gribov-Problems durch und zeige, daß wegen der Gribov-Kopien die spontane Symmetriebrechung selbst in Landau-Eichung nur bedingt als Charakterisierung des Higgsmechanismus tauglich ist.

Das letzte Kapitel ist einer neuen, eichinvarianten störungstheoretischen Untersuchung der Ordnung des Coulomb-Higgs Phasenübergangs gewidmet. Hierdurch erhält man die Voraussage einer trikritischen Linie, die die Phasentrennfläche in einen Bereich mit einem Übergang 1. Ordnung und einen weiteren mit einem Übergang 2. Ordnung unterteilt.



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41555209_0016

INHALTSVERZEICHNIS

<u>Einleitung</u>	I
<u>Kapitel 1: Abelsche Higgsmodelle</u>	1
1.1 Das abelsche Higgsmodell in der Kontinuumsfeldtheorie	2
1.2 Abelsche Higgsmodelle in der Gittereichtheorie	9
<u>Kapitel 2: Das nicht-kompakte Modell</u>	17
2.1 Keine Symmetriebrechung für $\alpha > 0$	18
2.2 Der Ordnungsparameter von Kennedy und King	32
2.3 Die Phasenstruktur des nicht-kompakten Modells	50
2.4 Flußquantisierung und Meissner-Effekt in der Higgsphase	63
2.5 Neue Schranken an die Phasentrennlinie	83
2.6 Zusammenfassung und Ausblicke für das nicht-kompakte Modell	99
<u>Kapitel 3: Das kompakte Modell</u>	105
3.1 Eichfixierung und Gribov-Kopien	107
3.2 Die Landau-Eichung in kompakten $U(1)$ -Modellen	122
3.3 Zusammenfassung und Ausblicke für das kompakte Modell	141
<u>Kapitel 4: Der Coleman-Weinberg Mechanismus</u>	147
4.1 Kritische Bemerkungen zum effektiven Potential und zur Loop-Entwicklung	148
4.2 Verallgemeinerte Clausius-Clapeyron und Ehrenfest-Gleichungen	154
4.3 Kein Phasenübergang 1. Ordnung in der 2-Loop-Näherung	159
4.4 Phasenübergang 1. Ordnung für $\lambda \sim e^4$	169
4.5 Zusammenfassung und Ausblicke zum Coleman-Weinberg Mechanismus	180
<u>Anhang</u>	183
<u>Literaturverzeichnis</u>	207

EINLEITUNG

Der mit Abstand am wenigsten verstandene Teil des ansonsten so erfolgreichen Standard-Modells ist sicherlich der Higgs-Sektor. Nicht nur, daß Higgs-Teilchen bis heute experimentell noch nicht gefunden sind, auch die quantenfeldtheoretischen Modelle zu ihrer Beschreibung geben noch viele ungeklärte Rätsel auf.

Zunächst waren skalare Higgsfelder ziemlich "ad hoc" eingeführt worden, mit dem einzigen Ziel, massive Eichbosonen in einer renormierbaren, lokalen Eichfeldtheorie zu erhalten. [Anderson 1963; Higgs 1964-66; Englert, Brout 1964; Guralnik et al. 1964; Kibble 1967]. Die störungstheoretische Beschreibung dieser Massenerzeugung fußt hierbei auf der Annahme, daß die Symmetrie unter globalen Eichtransformationen durch die Higgs selbstwechselwirkung spontan gebrochen ist und das Higgsfeld Φ einen nicht verschwindenden Vakuumerwartungswert erhält. Seit der erfolgreichen Implementierung dieses sog. Higgs-Kibble Mechanismus als essentiellen Bestandteil im Glashow-Salam-Weinberg Modell der elektroschwachen Wechselwirkung [Glashow 1961; Salam 1969; Weinberg 1967] wird in der Elementarteilchenphysik allgemein an die Existenz der Higgsteilchen geglaubt.

Die Masse des Higgsteilchens ist allerdings ein im Prinzip freier Parameter, der im Rahmen des Standardmodells nicht vorausgesagt werden kann (zumindest nicht ohne zusätzliche Annahmen, etwa die Anzahl der relevanten Parameter der renormierten Theorie betreffend [Kubo, Sibold, Zimmermann 1985]). Zu gegebener Eichkopplungskonstante ist sie im wesentlichen durch die Kopplungskonstante der Φ^4 -Selbstwechselwirkung bestimmt. Je größer die Higgsmasse also sein sollte, desto stärker die skalare Kopplung und desto schlechter demzufolge die Störungstheorie. Ein über die Störungstheorie hinausgehendes Verständnis des Higgsmechanismus wäre daher in diesem Zusammenhang durchaus von Interesse.

Zunächst müßte man hierzu allerdings wohl oder übel erst einmal die Existenz eines wohldefinierten nicht-trivialen Kontinuummodells garantieren, und genau dies wird in letzter Zeit immer mehr bezweifelt (siehe z.B. [Hasenfratz² 1986; Hasenfratz, Nager 1986]). Man argumentiert, daß das SU(2)-Higgsmodell nur den Gauß'schen Fixpunkt unter der Renormierungsgruppe habe und daß dort,

ähnlich wie in der reinen ϕ^4 -Theorie allseits angenommen, nur ein trivialer Kontinuumslikes existiere. Insbesondere gäbe es im Raum der Kopplungskonstanten keinen Teilbereich (auch keine invariante Untermannigfaltigkeit), für den dieser Fixpunkt UV-stabil (d.h. asymptotisch frei) wäre. Der angebotene Ausweg, das Higgsmodell nur als eine effektive Theorie für "große" Abstände zu betrachten, ist sicherlich unbefriedigend. Zwar lassen sich hierdurch (quasi aus der Not eine Tugend machend) obere Schranken an die Higgsmasse herleiten, aber eben nur unter Annahme, daß das Higgsteilchen überhaupt vernünftig durch diese Theorie beschrieben werden kann. Im übrigen beruhen die obigen Argumente ebenfalls nur auf einer rein störungstheoretischen Untersuchung der β -Funktionen.

Darüberhinaus sind all diese Untersuchungen, wie bereits erwähnt, manifest an das Phänomen der spontanen Symmetriebrechung gebunden. Spätestens seit Elitzurs Theorem [Elitzur 1975] sollte jedoch klar sein, daß spontane Symmetriebrechung kein eichinvariantes Konzept ist und - wenn überhaupt - nur durch Eichfixierung erzielt werden kann. In nichtabelschen Theorien ist Eichfixierung jedoch nicht ohne Gribov-Kopien möglich, wodurch die Gültigkeit der Störungstheorie für eichabhängige Erwartungswerte äußerst fragwürdig wird [Nill 1985].

Ein weiterer in diesem Zusammenhang äußerst ungenügend verstandener Punkt betrifft den Coleman-Weinberg Mechanismus [Coleman, Weinberg 1973; Linde 1976; Weinberg 1976]. Kurz gesprochen versteht man darunter die Existenz eines Higgs-Phasenübergangs 1. Ordnung, bei dem die spontane Symmetriebrechung plötzlich verschwindet und der Higgserwartungswert diskontinuierlich auf Null springt. Dies soll entweder durch eine Änderung der Parameter oder durch eine Erhöhung der Temperatur erreicht werden können und spielt eine zentrale Rolle in allen sog. "inflationären" Modellen des frühen Universums (für eine Übersicht siehe z.B. [Brandenberger 1985]). Aus obigen Gründen wäre auch hier eine eichinvariante Beschreibung äußerst wünschenswert. Zudem sollte endlich die Frage geklärt werden, warum in den störungstheoretischen Herleitungen immer nicht-konvexe effektive Potentiale auftauchen, obwohl längst bekannt ist (bzw. sein sollte), daß das effektive Potential in jeder Quantenfeldtheorie per definitionem konvex sein muß (siehe z.B. [Symanzik 1970]).

In der vorliegenden Arbeit habe ich mir nicht zum Ziel gesetzt, all diese Fragen restlos und im vollen Standardmodell zu beantworten. Ich habe mich

vielmehr auf das abelsche Higgsmodell beschränkt, da die meisten der angesprochenen Fragen bereits in diesem vereinfachten Modell diskutiert werden können. Insbesondere gelingt es bereits anhand dieses Modells, viele Mißverständnisse und Fehlinterpretationen der eichabhängigen Störungstheorie sehr klar aufzuzeigen und den tatsächlichen Zusammenhang mit den physikalischen (d.h. eichinvarianten) Konzepten zu verdeutlichen.

Um dies in einem möglichst strengen mathematischen Rahmen zu ermöglichen, bediene ich mich der bis heute einzigen über die Störungstheorie hinaus wohldefinierten und eichinvariant regularisierten Version des Modells, der Gittereichtheorie. Ich möchte an dieser Stelle betonen, daß gerade die Modelle der Gittereichtheorie die physikalisch relevantesten im Rahmen der konstruktiven Feldtheorie sind. Eine detaillierte Kenntnis ihrer Phasenstruktur ist unerlässlich für die Konstruktion möglicher Kontinuumstheorien. Die grundlegende Idee hierbei ist, die kritischen Punkte im Raum der "nackten" Kopplungskonstanten zu finden, an denen die in Gittereinheiten gemessenen Korrelationslängen divergieren. Daraufhin muß versucht werden, mit den "nackten" Kopplungskonstanten als Funktion der Gitterkonstanten in geeigneter Weise auf die Mannigfaltigkeit der kritischen Punkte zuzusteuern, so daß dabei die in physikalischen Einheiten gemessenen Korrelationen bzw. Massen konstant bleiben und in diesem Sinne der Limes Gitterkonstante gegen Null existiert. Obwohl dieses Programm bis heute höchstens ansatzweise durchgeführt werden kann (siehe z.B. [Balaban 1984-87; Balaban, Imbrie, Jaffe 1985; Federbush 1986]), sollte es (hoffentlich) in absehbarer Zeit zum Ziel führen [Federbush 1993].

In dieser Arbeit werde ich jedoch - sehr viel bescheidener - im wesentlichen nur die Phasenstruktur abelscher Higgsmodelle auf dem Einheitsgitter studieren und mich dabei vor allen Dingen auf den Zusammenhang zwischen Higgsmechanismus und spontaner Symmetriebrechung konzentrieren.

In Verallgemeinerung der Resultate von [Brydges, Fröhlich, Seiler 1979]; Balaban et al. 1984; Brydges, Seiler 1986; Kennedy, King 1986] werde ich eine relativ vollständige Übersicht über die Phasenstruktur des sog. "nicht-kompakten" abelschen Higgsmodells erarbeiten. Das Modell hat für kleine elektromagnetische

Kopplungskonstanten und geeignet stark ausgeprägte Higgspotentiale (*) eine Higgsphase, in der sämtliche eichinvarianten Korrelationen exponentiell abfallen und insbesondere der transversale Photonpropagator massiv ist. Umgekehrt erhält man eine Coulombphase mit einem nicht summierbaren transversalen Photonpropagator, falls entweder das Minimum des Higgspotentials nahe genug bei $|\phi|^2 = 0$ liegt oder die elektrische Kopplungskonstante groß genug ist. Der Higgserwartungswert ist jedoch innerhalb der Klasse der kovarianten α -Eichungen nur in Landau-Eichung (d.h. $\alpha = 0$) ein geeigneter Ordnungsparameter zur Unterscheidung der beiden Phasen. Während er in den angesprochenen Bereichen der Coulombphase verschwindet, ist er in der Higgsphase tatsächlich ungleich Null. Für $\alpha > 0$ und $d \leq 4$ tritt dagegen trotz Existenz der Higgsphase grundsätzlich keine spontane Symmetriebrechung auf. Diese Aussage ist gewissermaßen analog zum Mermin-Wagner Theorem [Mermin, Wagner 1966] bzw. seiner Version in klassischen statistischen Spinmodellen [Mermin 1967; McBryan, Spencer 1977] und wird ähnlich wie dort mit Hilfe der Technik der komplexen Translation (d.h. im wesentlichen ein streng kontrollierbares Spinwellenargument) bewiesen. Die Methoden zum Nachweis der Higgsphase und der spontanen Symmetriebrechung in Landau-Eichung beruhen auf der kombinierten Hoch- und Tieftemperaturentwicklung von Kennedy und King, wie sie bereits in [Seiler 1982] andeutungsweise skizziert wurde. Zum Nachweis der Coulombphase benütze ich Korrelationsungleichungen von [Brydges, Fröhlich, Seiler 1979a] sowie die Ideen von [Guth 1980; Fröhlich, Spencer 1982] für den entsprechenden Nachweis im reinen kompakten $U(1)$ -Eichmodell (d.h. ohne Higgsfelder).

Da das abelsche Higgsmodell in drei Dimensionen auch als phänomenologisches Modell für einen Supraleiter betrachtet werden kann [Ginzburg, Landau 1950], wobei die Higgsphase der supraleitenden Phase entspricht, bin ich in einem eigenen Abschnitt auch auf die magnetischen Eigenschaften des Modells eingegangen. Mit überraschender Klarheit konnte hierbei die Existenz des Meissner-Effektes als ein thermodynamisch-statistisches Phänomen der "supraleitenden" Phase gezeigt werden. Außerdem wurde auch die freie Energie einer einzelnen, durch das System gezwungen magnetischen Vortexlinie mit ganzzahligem Gesamtfluß als Unterscheidungsmerkmal zwischen den beiden Phasen untersucht. In der supra-

(*) d.h. mit einem tiefen Minimum bei hinreichend großem $|\phi|^2$.

leitenden Phase wächst sie exponentiell mit der Länge des Vortex, während sie in der Coulombphase beschränkt bleibt. Eine analoge Aussage gilt in vier Dimensionen für den 't Hooft-Loop. Zusammen mit dem Higgserwartungswert in Landau-Eichung lassen sich hiermit schließlich neue Schranken an die Phasentrennlinie für eine spezielle Version des nicht-kompakten Gittermodells angeben.

Der zweite Teil der Arbeit beschäftigt sich mit der kompakten Version des abelschen Higgsmodells auf dem Gitter. Als Eichgruppe haben wir hierbei $U(1)$ anstatt R . Es besteht natürlich die allgemeine Hoffnung, daß dies für einen eventuellen Kontinuumsimes keinen Unterschied machen sollte, was störungstheoretisch sicherlich auch zutrifft. Wenn wir jedoch nicht-störungstheoretisch eichabhängige Fragen wie die nach der spontanen Symmetriebrechung beantworten wollen, müssen wir zunächst eine strenge Behandlung des Gribov-Problems in Angriff nehmen. In der Tat, aufgrund der Kompaktheit der Eichgruppe $U(1)$ haben alle α -Eichungen in diesem Modell eine enorme Anzahl von Gribov-Kopien. Sie ist exakt durch die Determinante des diskretisierten Laplace-Operators auf dem Gitter gegeben und wächst folglich exponentiell mit der Anzahl der Gitterpunkte. Daß Gribov-Kopien für die störungstheoretische Berechnung eichinvarianter Erwartungswerte bedenkenlos vernachlässigt werden dürfen, habe ich in [Nill 1985] gezeigt. Gleichzeitig habe ich dort jedoch darauf hingewiesen, daß dies für eichabhängige Größen wie etwa den Higgspropagator $\langle \Phi(x), \Phi(y) \rangle$ asymptotisch falsche Ergebnisse liefern wird. Zumindest für große Werte des Eichfixierungsparameters α wird dies nun im $U(1)$ -Higgsmodell streng bewiesen. Aufgrund einer speziellen Untergruppe Grib von Eichtransformationen, die auch die eichfixierte Wirkung noch invariant läßt, gilt beispielsweise sogar $\langle \Phi(x), \Phi(y) \rangle \equiv 0$ für alle $x \neq y$, falls α groß genug ist, und zwar unabhängig von allen physikalischen Parametern des Modells. Außerdem gelten die Aussagen zur Abwesenheit spontaner Symmetriebrechung genauso wie im nichtkompakten Modell für alle $\alpha > 0$ und $d \leq 4$.

Schließlich habe ich ein neues Verfahren entwickelt, daß es erlaubt, auch die Landau-Eichung im $U(1)$ -Modell trotz Gribov-Kopien analytisch (und übrigens sicherlich auch numerisch) zu analysieren. Die Grundidee hierbei ist, das Vektorpotential A_μ mit Hilfe eines antisymmetrischen Tensorfelds $V_{\mu\nu}$ gemäß $A_\mu = \partial_\nu V_{\mu\nu}$ zu generieren und somit die Zwangsbedingung der Landau-Eichung $\partial_\mu A_\mu = 0$ automatisch zu implementieren. Hiermit konnte gezeigt werden, daß zumindest in einem Teilbereich der bekannten Confinement / Higgsphase



dieses Modells [Osterwalder, Seiler 1978] ebenso $\langle \phi \rangle = 0$ und sogar $\langle \phi_x \phi_y \rangle = 0$ für alle $x \neq y$ gilt. Als Schlußfolgerung muß man festhalten, daß in diesem Modell die Beschreibung des Higgsmechanismus durch spontane Symmetriebrechung - wenn überhaupt - nur sehr bedingt tauglich ist.

Auch wenn diese Ergebnisse quantitativ nicht unbedingt auf nicht-abelsche Theorien übertragbar sind, so besteht dennoch - wie bereits erwähnt - kein Anlaß zu der Hoffnung, daß dort die eichabhängigen Konzepte der Störungstheorie verlässlicher wären. In Situationen, wo wir zur Beantwortung physikalischer Fragestellungen auf die Störungstheorie angewiesen sind, da eine strenge analytische Behandlung nahezu aussichtslos erscheint, sollten wir daher wenigstens versuchen, unsere Kriterien auf eichinvariante Konzepte aufzubauen.

In diesem Sinne habe ich im dritten Teil dieser Arbeit einen vollkommen neuen und eichinvarianten Zugang zum Coleman-Weinbeg Mechanismus am Beispiel des abelschen Higgsmodells durchgeführt. Es handelt sich hierbei um eine störungstheoretische Analyse zur Frage der Ordnung des Higgsphasenübergangs, die auf der Verwendung verallgemeinerter Clausius-Clapeyron und Ehrenfest Gleichungen beruht. Mit Hilfe dieser thermodynamischen Kriterien ergab sich im asymptotischen Bereich $e^2 \rightarrow 0, \lambda \rightarrow 0, \lambda / e^2 > 0$ fest, kein Anzeichen für einen Phasenübergang 1. Ordnung bis zur 2-Loop-Näherung. Es stellte sich jedoch heraus, daß eine neue Störungsentwicklung im asymptotischen Bereich $e^2 \rightarrow 0, \lambda \rightarrow 0, \lambda / e^4 < \infty$ fest, tatsächlich einen Phasenübergang 1. Ordnung anzeigt, und sich in diesem Limes auch die üblichen Aussagen der Standardliteratur (siehe z.B. [Linde 1976]) eichinvariant reproduzieren und interpretieren lassen. Hierdurch wird uns die Existenz einer trikritischen Linie $\lambda_{tc}(e^2)$ nahegelegt, die im Zwischenbereich der beiden oben beschriebenen asymptotischen Gebiete verlaufen müßte, und auf der der Phasenübergang 2. Ordnung in einen solchen 1. Ordnung übergehen sollte. Monte-Carlo Rechnungen für U(1)- und SU(2)-Higgsmodelle lassen dies in der Tat seit längerem als eine realistische Möglichkeit erscheinen. [Jersák et al. 1985; Jansen et al. 1985/86; Langguth et al. 1986]. Aufbauend auf heuristischen "mean-field"-Methoden wurde Ähnliches auch von [Kleinert 1982/83] bereits angedeutet. Indem wir die störungstheoretischen Ausdrücke für die Phasentrennflächen in den beiden oben beschriebenen Gebieten zum Schnitt bringen, erhalten wir als Voraussage für die trikritische Linie

$\lambda_{tc}(e^2) \sim e^4 \log e^2$, wobei ich jedoch warnend hinzufügen muß, daß dies im Grenzbereich der asymptotischen Gültigkeit beider Entwicklungen liegt. Da ich zuversichtlich bin, ähnliche Resultate in näherer Zukunft auch für das SU(2)-Higgsmodell zu erhalten, erscheint hiermit die eingangs gestellte Frage nach der Existenz eines nicht-trivialen Kontinuumslikes in einem völlig neuen Licht. In der Tat wurde bereits von [Langguth, Montvay, Weisz 1986] erwähnt, daß dies entscheidend von der Frage abhängen könnte, ob der Phasenübergang für $e^2 > 0$ von 1. oder von 2. Ordnung ist. Zumindest hätten wir nun nicht nur einen Punkt, sondern eine ganze Fläche von kritischen Punkten, die als Fixpunkt für die Konstruktion eines nicht-trivialen Kontinuumslikes in Frage kommen könnten. Dies würde auch den Raum für neue Spekulationen eröffnen, etwa von der Gestalt, daß der Gauß'sche Fixpunkt im abelschen Higgsmodell vielleicht doch IR-stabil und im SU(2)-Higgsmodell UV-stabil sein könnte (zumindest in Teilbereichen des Parameterraumes oder längs der trikritischen Linie).

Der Aufbau dieser Arbeit ist wie folgt: In Kapitel 1 stelle ich das abelsche Higgsmodell vor und diskutiere kurz die übliche Herleitung des Higgsmechanismus. In Kapitel 2 wird das nicht-kompakte Modell behandelt. Der Higgserwartungswert in α -Eichungen wird für $\alpha > 0$ in Abschnitt 2.1 und für $\alpha = 0$ in Abschnitt 2.2 untersucht. In Abschnitt 2.3 wird eine relativ vollständige Übersicht über die Phasenstruktur des nicht-kompakten Modells gegeben. Abschnitt 2.4 beschäftigt sich mit dem Meissner-Effekt sowie der freien Energie von Vortexlinien bzw. 't Hooft-Schleifen. In Abschnitt 2.5 gebe ich schließlich neue Schranken an die Phasentrennlinie für eine spezielle Version des nicht-kompakten Gittermodells.

In Kapitel 3 untersuche ich anhand des kompakten Modells den Einfluß von Gribov-Kopien auf die spontane Symmetriebrechung. Abschnitt 3.1 behandelt α -Eichungen für $\alpha > 0$ und Abschnitt 3.2 für $\alpha = 0$.

Kapitel 4 ist schließlich dem Coleman-Weinberg Mechanismus gewidmet. Nach einer kritischen Diskussion zum effektiven Potential und zur Loop-Entwicklung in § 4.1 stelle ich das Konzept der verallgemeinerten Clausius-Clapeyron und Ehrenfestgleichungen in § 4.2 vor. In § 4.3 schließe ich hiermit auf einen Phasenübergang 2. Ordnung für $\lambda \sim e^2$ und in § 4.4 auf einen Phasenübergang 1. Ordnung für $\lambda \sim e^4$ sowie auf die Vorhersage $\lambda_{tc}(e^2) \sim e^4 \log e^2$ für die trikritische Linie.

Alle Kapitel haben eine eigene kurze Einleitung und die Kapitel 2-4 jeweils einen Schlußparagrafen, in dem die Ergebnisse zusammengefaßt sind und weitere Ausblicke diskutiert werden. Auf eine Gesamtschlußbemerkung habe ich deswegen aus Redundanzgründen verzichtet.

In den Anhängen werden technische Details und weiterführende Erläuterungen für den speziell interessierten Leser abgehandelt.

KAPITEL 1

ABELSCHE HIGGSMODELLE

In diesem Kapitel wird zunächst das abelsche Higgsmodell in der Kontinuumsfeldtheorie kurz vorgestellt und dann die Begriffe 'Higgsmechanismus' und 'spontane Symmetriebrechung' anhand der ersten Ordnung Störungstheorie erklärt. Im zweiten Abschnitt gehe ich zu den verschiedenen Gitterversionen über. Nach ein paar allgemeinen Definitionen zur Gitternotation führe ich zunächst das der Kontinuumsversion am nächsten gelegene nicht-kompakte Modell ein. Es folgen die kompakten $U(1)$ -Modelle sowie eine kurze Motivation für ihr Studium. Hierbei wird insbesondere auf das dort auftretende Phänomen der Gribov-Kopien eingegangen, das sonst nur aus nicht-abelschen Eichtheorien bekannt ist.

Um dieses Kapitel als Einführung auch für den Nicht-Fachmann lesbar zu machen, wurde auf mathematisch exakte Formulierungen weitgehendst verzichtet. An einigen Stellen wird für präzisere Definitionen auf den Anhang verwiesen.

1.1. Das abelsche Higgsmodell in der Kontinuumsfeldtheorie

Das abelsche Higgsmodell - oft auch skalare Quantenelektrodynamik (QED) genannt - beschreibt ein elektromagnetisch wechselwirkendes System bestehend aus einem Photonfeld $A_\mu(x)$ sowie einem komplexen, skalaren Materiefeld $\Phi(x)$, dem sog. Higgsfeld. Die 'Materie' in diesem Modell besteht aus Spin-0 Teilchen der Ladung e sowie deren Antiteilchen. Die Kopplung an das Photonfeld wird beschrieben durch die kovariante Ableitung

$$(d_A \Phi)_\mu := (\partial_\mu + ie A_\mu) \Phi \quad (1.1)$$

und die Dynamik des Systems ergibt sich aus der Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (dA)^2 + \frac{1}{2} |d_A \Phi|^2 + V(\Phi) \quad (1.2)$$

Hierbei ist $(dA)_{\mu\nu} := \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \equiv F_{\mu\nu}$ der elektromagnetische Feldstärke-tensor, $(dA)^2 := \sum_{\mu < \nu} (dA)_{\mu\nu} (dA)^{\mu\nu}$ und $|d_A \Phi|^2 := (d_A \Phi)_\mu^\dagger (d_A \Phi)^\mu$.

Das 'Higspotential' $V(\Phi)$ beschreibt die Selbstwechselwirkung des Materiefeldes Φ . Es hängt nur von $|\Phi|^2$ ab und nimmt sein Minimum je nach Wahl äußerer Parameter entweder bei $|\Phi|^2 = 0$ oder bei $|\Phi|^2 = v^2 > 0$ an. Eine übliche Parametrisierung ist z.B.

$$\begin{aligned} V(\Phi) &= \frac{\lambda}{4} |\Phi|^4 - \frac{\sigma}{2} |\Phi|^2 \\ &= \frac{\lambda}{4} (|\Phi|^2 - v^2)^2 + \text{const.} \end{aligned} \quad (1.3)$$

mit $\lambda > 0$ und $v^2 := \sigma/\lambda$

Die Lagrangedichte (1.2) ist invariant unter lokalen Eichtransformationen

$$A \rightarrow A' = A + \frac{1}{e} d\chi, \quad \Phi \rightarrow \Phi' = e^{-i\chi} \Phi \quad (1.4)$$

wobei $\chi(x) \in \mathbb{R}$ und $(d\chi)_\mu(x) = (\partial_\mu \chi)(x)$. Die Invarianz folgt sofort aus der Nilpotenz der äußeren Ableitung ($d^2 = 0$), der U(1)-Invarianz von V

und der Transformationseigenschaft der kovarianten Ableitung

$$d_A \phi \rightarrow d_{A'} \phi' = e^{-i\chi} d_A \phi \quad (1.5)$$

Das abelsche Higgsmodell ist also eine Eichfeldtheorie mit $\mathbb{R}$ bzw. $U(1)$ als abelscher Strukturgruppe^(*). Weiter sind auch definitionsgemäß alle physikalischen Observablen dieses Systems als Funktionale der Felder A und ϕ invariant unter den Transformationen (1.4). Physikalische Bedeutung haben demzufolge nicht die Felder selbst, sondern lediglich ihre Eichäquivalenzklassen.

Um zu einer quantisierten Version des Modells zu kommen, orientiere ich mich am euklidischen Funktionalintegralformalismus der Quantenfeldtheorie (s. z.B. [Glimm, Jaffe 1981]). Die analytisch zu imaginärer Zeit fortgesetzten Vakuumerwartungswerte lokaler Observabler $f(A, \phi)$ ergeben sich hier als Erwartungswerte im euklidischen Funktionalmaß

$$\langle f \rangle = \frac{1}{Z} \int DA D\phi e^{S_{\text{inv}}(A, \phi)} f(A, \phi) \quad (1.6)$$

Hierbei stehen $DA = \prod_{x, \mu} dA_\mu(x)$ und $D\phi = \prod_x d\phi(x)$ als Symbole für die (nicht-existierenden) Produkt-Lebesguemaße über alle Raum-Zeit-Punkte $x \in \mathbb{R}^4$.

S_{inv} ist die euklidische Wirkung

$$S_{\text{inv}}(A, \phi) = - \int d^4x \mathcal{L}_E(A(x), \phi(x))$$

wobei sich $\mathcal{L}_E$ aus $\mathcal{L}$ durch Ersetzen von $\eta_{\mu\nu}$ durch die euklidische Metrik $\delta_{\mu\nu}$ ergibt. Die Zustandssumme Z ist der Normierungsfaktor, der sich aus obigem Funktionalintegral für $f = 1$ errechnet.

Ungeachtet der Tatsache, daß in 4 Raum-Zeit-Dimensionen die Existenz eines Kontinuumlimes, der formal durch (1.6) beschrieben werden könnte, trotz immensen Aufwandes (s. z.B. [Balaban et al. 1985, Federbush 1986]) bis heute noch nicht gezeigt ist, haben wir hier die zusätzliche Schwierigkeit, daß wegen der Eichinvarianz von S_{inv} das Funktionalmaß prinzipiell

(*) Mit $g(x) = e^{i\chi(x)} \in U(1)$ läßt sich die Eichtransformation (1.4) auch schreiben als $A' = A - \frac{1}{e} g^{-1} dg$, $\phi' = g\phi$

nicht normierbar ist. Da jedoch auch f eichinvariant ist, sollten sich die vom 'unendlichen Volumen' der Eichorbits herrührenden Divergenzen im Zähler und Nenner von (1.6) gerade wegekürzen (genaugenommen sollte man nur über Eichäquivalenzklassen integrieren). Um diese zunächst heuristisch anmutende Argumentation besser begründen zu können, führt man üblicherweise eine sog. Eichung (= Eichfixierung) ein. Gemeint ist hierbei eine zusätzliche Wichtung ^(*) $\exp(S_{gf}(A, \Phi))$ zum Funktionalmaß mit der Eigenschaft, daß die 'Mittelung' von $\exp(S_{g.f.})$ über alle Eichtransformationen unabhängig von der durch (A, Φ) bestimmten Eichäquivalenzklasse immer 1 liefern soll:

$$\int D\chi \exp[S_{gf}(A + \frac{1}{e} d\chi, e^{-i\chi} \Phi)] \stackrel{!}{=} 1 \quad (1.7)$$

Hiermit läßt sich in einem mathematisch recht allgemeinen Rahmen (der auch insbesondere die im nächsten Abschnitt zu besprechende Gitterregularisierung mit abdeckt) zeigen, daß für eichinvariante f die unnormierten Integrale

$$[f]_{gf} := \int DA D\Phi e^{S_{inv}(A, \Phi) + S_{g.f.}(A, \Phi)} f(A, \Phi) \quad (1.8)$$

von der speziellen Wahl der Eichfixierung S_{gf} nicht abhängen [Nill 1985]
Nun setzt man die eichfixierte Zustandssumme

$$Z_{g.f.} := [1]_{g.f.} \quad (1.9)$$

und definiert den Erwartungswert von f als

$$\langle f \rangle := Z_{g.f.}^{-1} [f]_{g.f.} \quad (1.10)$$

Die alte 'Definition' (1.6) ergibt sich hieraus durch den formalen Grenzübergang $\exp(S_{gf}) \rightarrow \text{const.}$ ^(**)

Eine sehr gängige Schar von Eichfixierungen bilden die sog. α -Eichungen

$$e^{S_{g.f.}} = N^{-1} \exp\left[-\frac{1}{2\alpha} \int d^4x (d^* A)^2\right] \quad (1.11)$$

(*) gf steht für 'gauge fixing'.

(**) Die Konstante $\text{const} = [\int D\chi]^{-1} = \frac{1}{\infty}$ 'kürzt' sich dann weg.

Hierbei ist $-d^* A = \sum_{\mu} \partial_{\mu} A_{\mu}$ die Divergenz von A. Die Normierungskonstante N ist unabhängig von A und ergibt sich zu

$$N = \int D\chi \exp \left[-\frac{1}{2\alpha} \int d^4x \left(d^* H + \frac{1}{e} d^* d\chi \right)^2 \right] \\ = \int D\chi \exp \left[-\frac{1}{2\alpha e^2} \int d^4x (d\chi)^2 \right]$$

wobei die Invarianz von $D\chi$ unter der Variablentransformation $\chi \rightarrow \chi + e \Delta^{-1} d^* A$ benutzt wurde. $\Delta = -\sum_{\mu} \partial_{\mu}^2$ ist der Laplace-de Rham Operator auf $\mathbb{R}^4$. Für $\alpha = 1$ nennt man (1.11) die 'Feynmaneichung', und im Limes $\alpha \rightarrow 0$ erhält man die "Landaeichung", in der $\exp(S_{gf})$ ersetzt wird durch

$$e^{S_{gf}} \rightarrow \prod_x \delta(d^* H(x))$$

Hat man erst einmal eine Eichung gewählt, so kann man in dieser festgehaltenen Eichung selbstverständlich auch Erwartungswerte nicht-eichinvarianter Größen berechnen. Üblich ist hier beispielsweise die Einpunktfunktion $\langle \Phi(x) \rangle$ oder die Zweipunktfunktion $\langle \bar{\Phi}(x) \Phi(y) \rangle$ des Higgsfelds. Die physikalische Interpretation solcher Erwartungswerte ist jedoch im allgemeinen unklar. Insbesondere hängen diese Erwartungswerte nun selbstverständlich von der konkret gewählten Eichung ab, wie wir im Zusammenhang mit der Frage der spontanen Symmetriebrechung noch explizit sehen werden.

Bevor ich zur Gitterregularisierung übergehe, will ich kurz die wesentlichen Aussagen der Störungstheorie zu diesem Modell skizzieren: Zur näherungsweise Berechnung der Funktionalintegrale entwickelt man die eichfixierte Wirkung $S = S_{inv} + S_{gf}$ um eine minimierende Feldkonfiguration $(\hat{A}, \hat{\Phi})$:

$$S(H, \Phi) \approx S(\hat{A}, \hat{\Phi}) + \frac{1}{2} (\hat{H}, \hat{\Phi} | C^{-1} | \hat{H}, \hat{\Phi})$$

Hierbei ist $\hat{A} = A - \hat{A}$, $\hat{\Phi} = \Phi - \hat{\Phi}$ und C^{-1} die durch die zweite Funktionalableitung ('Hessematrix') am Minimum $(\hat{A}, \hat{\Phi})$ von S gegebene quadratische Form im Raum der Felder (A, Φ) . Für $\epsilon > 0$ und $v^2 = \epsilon/\lambda$ wählt man für allgemeine α -Eichungen $\hat{A} = 0$, $\hat{\Phi} = v$. Mit $\hat{\Phi}_1 = \text{Re } \hat{\Phi}$ und $\hat{\Phi}_2 = \text{Im } \hat{\Phi}$ ergibt sich damit die quadratische Approximation zu

$$(\hat{H}, \hat{\Phi} | C^{-1} | \hat{H}, \hat{\Phi}) \\ = (\hat{H} | \Delta + e^2 v^2 | \hat{H}) + \frac{1-\alpha}{\alpha} (d^* H, d^* H) \\ + (\hat{\Phi}_1 | \Delta + 2\epsilon | \hat{\Phi}_1) + (\hat{\Phi}_2 | \Delta | \hat{\Phi}_2) + 2ev (H, d\Phi_2) \quad (1.12)$$

wobei die reellen Skalarprodukte $\langle \cdot, \cdot \rangle$ als Integrationen über R^4 (und gegebenenfalls Kontraktion der Vektorindizes) definiert sind. In erster Ordnung Störungstheorie hat man nun die Erwartungswerte lediglich in dem Gauß'schen Maß mit Kovarianz C zu berechnen. Basierend auf dieser 'semi-klassischen' Approximation ergeben sich die folgenden Aussagen:

1. Spontane Symmetriebrechung

Man erhält sofort $\langle \hat{\phi} \rangle = 0$ und daher

$$\langle \phi \rangle = v > 0 \quad (1.13)$$

Da die eichfixierte Wirkung für α -Eichungen immer noch invariant unter globalen, d.h. x -unabhängigen Eichtransformationen ist, charakterisiert (1.13) einen eichfixierten Zustand, in dem diese globale Eichsymmetrie spontan gebrochen ist^(*).

2. Higgsmechanismus

Wenn wir Renormierungsfragen einmal beiseite lassen und nur die Kovarianz im Impulsraum betrachten [Lee 1972],

$$\left[\begin{array}{cc} (p^2 + e^2 v^2)^{-1} (\delta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}) + \alpha \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} & , \quad iev \alpha \frac{p_\mu}{p^2} \delta_{2b} \\ -iev \alpha \delta_{a2} \frac{p_\nu}{p^2} & , \quad (p^2 + 2\delta)^{-1} \delta_{a1} \delta_{b1} + \frac{p^2 + \alpha e^2 v^2}{p^4} \delta_{a2} \delta_{b2} \end{array} \right] \quad (1.14)$$

so erkennen wir^(**) einen massiven transversalen Photonpropagator $(p^2 + m_{ph}^2)^{-1} (\delta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2})$ mit einer 'Photonmasse'

$$m_{ph} = ev \quad (1.15)$$

Man erwartet daher, daß die Zweipunktfunktion des elektromagnetischen Feldes exponentiell abfällt

$$\langle F_{\mu\nu}(x) F_{\mu\nu}(y) \rangle \sim e^{-m_{ph}|x-y|} \quad (1.16)$$

(*) Man hätte natürlich auch um $\hat{A} = 0$, $\hat{\phi} = e^{i\chi} v$ mit $\chi = \text{const.}$ entwickeln können, um dann einen Zustand mit $\langle \phi \rangle = e^{i\chi} v$ zu beschreiben.

(**) $C(p)$ wirkt für festes p als Matrix auf den $(d+2)$ -dimensionalen Vektoren $(\tilde{A}_\mu(p), \tilde{\phi}_a(p))$, $\mu = 0, \dots, d-1$, $a = 1, 2$.

Die langreichweitige Coulombwechselwirkung wird durch die Higgsfelder also abgeschirmt und man erhält statt dessen ein Yukawa-artiges Abfallverhalten. Allgemeiner spricht man im Rahmen der Störungstheorie vom Higgs-mechanismus, wenn durch die Koppelung masseloser Eichbosonen an selbstwechselwirkende Materiefelder ein Teil der Eichbosonen massiv wird.

Bemerkungen:

i) Normalerweise hat die spontane Brechung innerer Symmetrien in der Quantenfeldtheorie die Existenz masseloser 'Goldstone-Bosonen' zur Folge [Goldstone, Salam, Weinberg 1961]. In einem axiomatischen Rahmen basierend auf einer Hilbertraum Darstellung mit 'positiver Metrik' wurde dies von [Kastler, Robinson, Swieca 1966] und [Ezawa, Swieca 1967] gezeigt. Es war die Idee von [Anderson 1963; Higgs 1966; Kibble 1967], daß in Eichfeldtheorien die Goldstone-Bosonen von den Eichfeldern 'aufgegessen' werden und diese dadurch eine Masse erhalten (für einen Überblick s. [Bernstein 1974]).

ii) Beginnt man für eine axiomatische Quanteneichfeldtheorie mit einer Darstellung der von allen lokalen Feldern erzeugten Algebra auf einem Hilbertraum mit indefiniter Metrik [Strocchi, Wightman 1974], so gilt auch dort ein Goldstone-Theorem [Strocchi 1977]. Dies ist in naiver Übereinstimmung mit dem Auftreten auch von masselosen Propagatoren in der Kovarianz $C(p)$ (1.14). Zur Berechnung eichinvarianter Greenfunktionen tragen die masselosen Anteile jedoch nicht bei [Lee, 1972]. In der Tat wurde unter Zugrundelegung recht allgemeiner Axiome von [Strocchi 1977] gezeigt, daß sämtliche durch spontane Brechung der globalen Eichsymmetrie auftretenden Goldstone-Zustände orthogonal zum physikalischen Unterraum (mit positiv semi-definiter Metrik) liegen.

iii) Für Heisenberg-Spinmodelle und skalare Feldtheorien in $d \leq 2$ Dimensionen verbietet das Mermin-Wagner-Theorem [Mermin, Wagner 1966; Coleman 1973] eine spontane Symmetriebrechung. Einen störungstheoretischen Hinweis hierzu liefert die Tatsache, daß die '1-loop' Korrekturen für $\langle \phi(x) \rangle$ infrarot-divergent sind. Betrachten wir nämlich das folgende Feynman-Diagramm



wobei die gestrichelte Linie den Goldstone-Propagator symbolisiert, so erhalten wir das Integral $\int d^d p p^{-2}$, welches für $d \leq 2$ bei $p = 0$ divergiert. Genau dasselbe Feynman-Diagramm tritt aber auch im Higgsmodell mit α -Eichungen auf. Nur ist hier der Goldstone-Propagator gegeben durch $(p^2 + \alpha e^2 v^2)^{-1}$ (s. l. 14). Das entsprechende Integral lautet also $\int d^d p (p^2 + \alpha e^2 v^2)^{-1}$ und ist deshalb für alle $\alpha \neq 0$ infrarot-divergent in $d \leq 4$ Dimensionen. Von daher ist es nicht völlig überraschend daß zumindest in der Gittereichtheorie keine spontane Symmetriebrechung für $\alpha \neq 0$ auftritt (s. Kap. 2 und 3).

iv) Es gibt auch noch andere Eichungen, z.B. die sog. R_f -Eichungen, auf die ich hier nicht eingehen will. Es sei nur erwähnt, daß in diesen Eichungen die globale Eichinvarianz durch S_{gf} explizit gebrochen wird und es daher keinen Sinn mehr macht, von spontaner Symmetriebrechung zu reden.

1.2. Abelsche Higgsmodelle in der Gittereichtheorie

Will man die Fragen zur spontanen Symmetriebrechung und zum Higgsmechanismus sowie auch die später zu besprechenden Themenkreise der Gribov-Kopien und des Coleman-Weinberg-Mechanismus mathematisch exakt untersuchen, so ist es zunächst unumgänglich, sich ein wohldefiniertes Modell zu verschaffen. Die nach wie vor einzige bekannte eichinvariante nicht-störungstheoretische UV-Regularisierung von Kontinuumseichtheorien ist die Gittereichtheorie. Sie erlaubt es, Funktionalintegrale der Form (.1.6) im endlichen Volumen ohne Probleme zu definieren und anschließend den thermodynamischen Limes (d.h. Volumen gegen unendlich) durchzuführen. Des weiteren ist sie die wohl vielversprechendste Version auf dem Weg zur Konstruktion einer Kontinuums-
theorie.

Ich will mich der Klarheit der Darstellung wegen hauptsächlich auf symmetrische Gitter in Raum-Zeit-Dimensionen $d = n + 1$ mit Gitterkonstanten $\varepsilon_\mu = \varepsilon = 1$ ($\mu = 0, \dots, n$) beschränken. Die qualitativen Aussagen der folgenden Kapitel hängen von dieser Wahl nicht wesentlich ab. Lediglich im Limes kontinuierlicher Zeit $\varepsilon_0 \rightarrow 0$, der dem Übergang zu einer (nicht-relativistischen) Vielteilchenquantenmechanik im Schrödingerbild entspricht, werden die meisten der zu besprechenden analytischen Methoden nicht mehr funktionieren. Ich werde an den wichtigen Stellen im Text auf diese Unterschiede aufmerksam machen. Im übrigen sei auf den Schluß von § 2.5 verwiesen, wo eine Verallgemeinerung auf beliebige $\varepsilon_\mu > 0$ kurz skizziert wird. Der volle Kontinuums-
limes wird in dieser Arbeit nicht diskutiert.

Wir ersetzen also das euklidische Raum-Zeit-Kontinuum R^d durch ein Gitter Z^d . Um den auf R^d definierten Feldern entsprechende Gitterversionen zuordnen zu können, bedienen wir uns der Sprache der algebraischen Topologie (siehe z.B. [Hocking, Young 1961]). Wir identifizieren die physikalischen Felder zunächst mit (reell- oder komplexwertigen) ν -Formen auf R , $0 \leq \nu \leq d$. Im Fall $\nu = 0$ sind das skalare Funktionen $\phi(x)$, die durch Einschränkung auf $x \in Z^d$ sofort ihr Gitterpendant finden. Im Fall $\nu > 0$ mitteln wir die ν -Formen über die von nächsten Nachbarpunkten aufgespannten achsenparallelen ν -dimensionalen 'Rechtecke', indem wir über diese ' ν -Rechtecke'

integrieren und durch ihren Flächeninhalt dividieren^(*). Hierbei ist noch zu beachten, daß das Vorzeichen eines Integrals über eine ν -Form von der Orientierung des Integrationsgebiets abhängt. Wir bezeichnen die mit ihrer Orientierung versehenen achsenparallelen ν -Rechtecke der Kantenlänge 1 (allgemein ε_μ) und Eckpunkten $x \in \mathbb{Z}^d$ (allgemein $x^\mu \in \varepsilon_\mu \mathbb{Z}$) als orientierte elementare ν -Zellen und die Menge dieser elementaren orientierten ν -Zellen mit $[\Lambda_\nu^\infty]$. Λ_ν^∞ ist die Menge der positiv orientierten elementaren ν -Zellen, die wir mit den elementaren ν -Zellen (d.h. ohne Orientierung) identifizieren. Einem physikalischen Feld als ν -Form auf $\mathbb{R}^d$ entspricht also in der abelschen Gittereichtheorie eine Funktion auf der Menge der elementaren ν -Zellen Λ_ν^∞ respektive eine Funktion auf der Menge der orientierten elementaren ν -Zellen $[\Lambda_\nu^\infty]$, die unter Orientierungswechsel ihr Vorzeichen ändert. Man nennt solche Funktionen ν -Koketten oder einfach wieder ν -Formen. Ich bezeichne die Menge der ν -Formen im folgenden mit Ω^ν .

Das Photonfeld^(**) $A_\mu(x) = A_{x, x+\hat{\mu}} = A(b)$ lebt in der Gittertheorie also auf den Intervallen ('Bonds') $b = [x, x + \hat{\mu}] \in [\Lambda_1^\infty]$, und wir setzten $A_{xy} = -A_{yx}$ für alle nächsten Nachbarn $x, y \in \mathbb{Z}^d$, $|x - y| = 1$. Weiter lebt der elektromagnetische Feldstärketensor $F_{\mu\nu}(x) = F(p)$ auf Rechtecken ('Plaketten') $p = [x, x + \hat{\mu}, x + \hat{\nu}] \in [\Lambda_2^\infty]$ mit $F(-p) = -F(p)$, wobei $-p$ die umgekehrte Orientierung hat wie p . (Für eine präzisere Definition der Notationen siehe Anhang A.)

Als nächstes benötigen wir die Gitteranaloge zu den Differentialoperatoren d, d^* und d_A . Hierzu orientieren wir uns am Stoke'schen Satz, der für $(\nu-1)$ -Formen α und ν -dimensionale Integrationsgebiete (ν -Ketten) c die Identität

$$\int_c d\alpha = \int_{\partial c} \alpha$$

liefert. Um Konsistenz mit unserer vorherigen Übersetzungsregel zu haben,

(*) Für das Gitter $\mathbb{Z}^d$ ist dieser Flächeninhalt immer 1.

(**) $\hat{\mu} = e_\mu$ ist der Einheitsvektor in Richtung μ . Für allgemeine Gitterkonstanten gilt $\hat{\mu} = \varepsilon_\mu e_\mu$.

folgt für $c \in [\Lambda_\nu^\infty]$ und $\alpha \in \Omega^{n-1} (*)$

$$d\alpha(c) = \sum_{q \in \partial c} \alpha(q) \quad (1.17)$$

Hierbei ist ∂c der orientierte Rand von c , d.h., die Menge der orientierten elementaren $(\nu - 1)$ -Zellen $q \in [\Lambda_{\nu-1}^\infty]$, die sich aus den Ecken von c bilden lassen, so daß die Orientierung von q für gerade ν ins Innere und für ungerade ν ins Äußere von c zeigt (s. Anhang A für eine präzisere Definition). Für 0-Formen ϕ ergibt sich insbesondere $(d\phi)_{xy} = \phi(y) - \phi(x)$.

Zur Motivation der Definition von d_A auf dem Gitter erinnere man sich an die differentialgeometrische Definition der kovarianten Ableitung als 'infinitesimalen Paralleltransport'. Die vom Weg c abhängigen Paralleltransporter sind hierbei gegeben durch

$$U(c) = e^{ie \int_c A_\mu dx^\mu} \quad (1.18)$$

(In nicht-abelschen Theorien ist (1.18) durch den entsprechenden weggeordneten Ausdruck zu ersetzen.) Die elementaren Wege auf dem Gitter sind gerade die Bonds $b = [x, x + \hat{\mu}] \in [\Lambda_1^\infty]$ und man kann daher den Eichfeldern gemäß (1.18) auch kompakte 'Linkvariable'

$$U_{x, x+\hat{\mu}} = e^{ie A_{x, x+\hat{\mu}}} \quad (1.19)$$

zuordnen. Hiermit ergibt sich die kovariante Ableitung auf dem Gitter zu

$$(d_A \phi)_{xy} = U_{xy} \phi_y - \phi_x \quad (1.20)$$

Eichtransformationen sind nun wie im Kontinuum gegeben durch skalare Funktionen $\chi \in \Omega^0$. Die Wirkung auf die Felder A und ϕ wird in völliger Analogie definiert

$$A \mapsto A' = A + \frac{1}{e} d\chi, \quad \phi \mapsto \phi' = e^{-i\chi} \phi$$

Wegen $d^2 = 0$ folgt wie im Kontinuum $dA' = dA$ und aus (1.20) schließen wir $(d_A \phi')_{xy} = \exp(-i\chi_x) (d_A \phi)_{xy}$. Folglich ist auch $|(d_A \phi)_{xy}|^2$ wie im Kontinuum eichinvariant. Schließlich definieren wir d^* als den zu d adjungierten Operator bezüglich des auf den ν -Formen in natürlicher Weise gegebenen l^2 -Skalarprodukts

$$(\alpha, \alpha) := \sum_{c \in \Lambda_\nu^\infty} |\alpha(c)|^2 \equiv \|\alpha\|^2 \quad (1.21)$$

(*) Für allgemeine Gitter ist die rechte Seite von (1.17) noch durch das Volumen von c zu dividieren und jeder Summand mit dem Volumen von q zu multiplizieren

Konkret ergibt sich damit^(*)

$$d^* \alpha(q) = \sum_{c \in \partial^* q} \alpha(c) \quad (1.22)$$

wobei $\partial^* q$ der orientierte 'Korand' von q ist, d.h. $\partial^* q = \{c | q \in \partial c\}$.

Speziell für 1-Formen folgt

$$(d^* A)(x) = \sum_{|x-y|=1} A_{yx}$$

Hiermit sind wir nun in der Lage, die eichfixierte Wirkung für α -Eichungen auf dem Gitter anzugeben

$$\begin{aligned} S_\alpha &= S_{inv} + S_{g.f.} \\ S_{inv} &= \frac{1}{2} \|dH\|^2 + \frac{1}{2} \|d_H \Phi\|^2 + \sum_x V(\Phi_x) \\ S_{g.f.} &= \frac{1}{2\alpha} \|d^* H\|^2 \end{aligned} \quad (1.23)$$

Erwartungswerte werden zunächst im endlichen Volumen definiert

$$\langle f \rangle_{\Lambda, \alpha} = Z_{\Lambda, \alpha}^{-1} \int D_\Lambda H D_\Lambda \Phi f(H, \Phi) e^{S_{\Lambda, \alpha}(H, \Phi)} \quad (1.24)$$

Konkret fassen wir dabei $\Lambda = \bigcup_{\nu=0}^{\infty} \Lambda_\nu$ mit $\Lambda_\nu \subset \Lambda_{\nu+1}$ als Unterzellenkomplex von $\Lambda^\infty = \bigcup_{\nu=0}^{\infty} \Lambda_\nu^\infty$ auf (s. Anhang A) und definieren

$$D_\Lambda H = \prod_{b \in \Lambda_1} dH_b, \quad D_\Lambda \Phi = \prod_{x \in \Lambda_0} d\Phi_x$$

$Z_{\Lambda, \alpha}$ ist die Zustandssumme im endlichen Volumen Λ . Sie ergibt sich aus (1.24) durch die Normierungsbedingung $\langle 1 \rangle_{\Lambda, \alpha} = 1$. Um (1.24) vollständig zu definieren, müssen noch Randbedingungen vereinbart werden, d.h. eine Vorschrift, wie $S_{\Lambda, \alpha}$ auf den Punkten, Kanten und Plaketten im Rand $\partial \Lambda$ von Λ berechnet werden soll. Hierauf werde ich im einzelnen im nächsten Kapitel eingehen.

(*) Für allgemeine Gitter ist die rechte Seite von (1.22) noch mit dem Volumen von q zu multiplizieren und jeder Summand $\alpha(c)$ durch das Volumen von c zu dividieren.

Zuvor möchte ich jedoch noch die sog. kompakten $U(1)$ Modelle vorstellen, die in Kapitel 3 behandelt werden. Sie unterscheiden sich von der bisher besprochenen nicht-kompakten Version dadurch, daß die Eichfelder $A_\mu(x)$ nun von Beginn an ersetzt werden durch die kompakten $U(1)$ -wertigen Linkvariablen (1.19) $U_\mu(x) = \exp(ieA_\mu(x))$. Als physikalische Observable sind daher nur noch Funktionen der U 's (und natürlich der Φ 's), also periodische^(*) Funktionen der A -Felder zugelassen. Insbesondere muß auch die Wirkung selbst periodisch sein. Eine übliche Wahl ist entweder die Wilsonwirkung, bei der die elektromagnetische Selbstwechselwirkung ersetzt wird durch

$$\frac{1}{2} (dH)_p^2 \rightarrow \beta [\cos(e dH(p)) - 1] \quad (1.25a)$$

oder aber die Villain-Polyakov-Wirkung, die gegeben ist durch die Ersetzung

$$\exp[-\frac{1}{2} (dH)_p^2] \rightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp[-\frac{\beta}{2} [e(dH)_p + 2\pi n]^2] \quad (1.25b)$$

Allgemein wird dieser Teil der Wirkung als Plaquettenwirkung bezeichnet, da er nur von den Plaquettenvariablen

$$dU = \exp(i e dA)$$

abhängt. Bei geeigneter Skalierung ergibt sich mit $\beta = e^{-2}$ beidesmal die nicht-kompakte Wirkung im naiven Kontinuumslimites $\varepsilon \rightarrow 0$.

Lokale Eichtransformationen sind nun ebenfalls gegeben durch $U(1)$ -wertige Funktionen $g(x) = e^{i\chi(x)}$. Ihre Wirkung auf die U 's entspricht der Transformationseigenschaft von Paralleltransportern und errechnet sich aus der entsprechenden Wirkung auf die A 's

$$U_{xy} \mapsto U'_{xy} = \exp ie \left(A + \frac{1}{e} d\chi \right)_{xy} = g_x^{-1} U_{xy} g_y \quad (1.26a)$$

Mit Hilfe der Notation $(dg)_{xy} := \exp i(d\chi)_{xy}$ läßt sich das auch schreiben als

$$U'_{xy} = U_{xy} (dg)_{xy} \quad (1.26b)$$

(*) d.h. mit Periode $2\pi/e$.

Man sieht sofort, daß die Plaquettenvariablen wie im nicht-kompakten Fall eichinvariant sind. Allgemeiner folgt aus (1.26), daß das Produkt der U 's längs jeden geschlossenen Weges in $[\Lambda_1^\infty]$ eichinvariant ist. Speziell ist $(dU)_p$ gerade das Produkt über den Rand der Plaquette p , also $(dU)_p = (dU')_p$. Schließlich wird in kompakten Eichmodellen das Produktmaß DA ersetzt durch ein entsprechendes Produkt über normierte Haarmaße $DU = \prod_b dU_b$. Dies hat zur Folge, daß trotz der Eichinvarianz $\exp(S_{\text{inv}})$ bereits integrierbar ist und eine Eichfixierung damit überflüssig wird. Ohne Eichfixierung gibt es in kompakten Modellen allerdings auch keine spontane Symmetriebrechung ('Elitzur's Theorem', [Elitzur 1975, De Angelis, De Falco, Guerra 1978]). Zur Untersuchung eines evt. Zusammenhangs zwischen spontaner Symmetriebrechung und Higgsmechanismus muß man also auch in diesen Modellen die Eichung fixieren. In Analogie zum nicht-kompakten Modell verwendet man hier periodische Funktionen von dA , also Funktionen von $dU = \exp(i \oint A)$, z.B.

$$S_{g.f.} = \frac{\beta}{\alpha} \sum_x \cos(e d^* H(x)) - \text{const} \quad (1.27a)$$

oder

$$e^{S_{g.f.}} = \prod_x \text{const.} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp - \frac{\beta}{2\alpha} (d^* H(x) + 2\pi n)^2 \quad (1.27b)$$

Die Konstanten const. werden unabhängig von U so eingerichtet, daß die Mittelung von $\exp S_{g.f.}$ über alle Eichtransformationen gerade 1 liefert (s. Kap. 3)

$$\int Dg \exp S_{g.f.}(d^*(Udg)) = 1 \quad (1.28)$$

wobei $Dg = \prod_x dg_x$ ebenfalls ein Produkt über normierte Haarmaße ist.

Es zeigt sich nun, daß die kompakten Modelle in mancher Hinsicht Eigenschaften aufweisen, wie man sie von nicht-abelschen Kontinuumstheorien erwartet bzw. kennt und die sie vom nicht-kompakten Modell unterscheiden. Erstens hat man im kompakten reinen Eichmodell (d.h. ohne Higgsfelder) für kleine β Confinement äußerer Ladungen. Diese Confinement-Phase setzt sich zumindest für Higgsfelder mit eingefrorener Länge (d.h. im Limes $\lambda \rightarrow \infty$, v^2 fest) analytisch fort zu einer Confinement-Higgs-Phase, in der Korrelationen eichinvarianter Observabler exponentiell

abfallen [Osterwalder, Seiler 1978]. Zweitens erlauben die Eichfixierungen (1.26) sog. Gribov-Kopien, d.h. zu jeder Eichfeldkonfiguration U gibt es eichtransformierte Konfigurationen U' mit

$$S_{gf}(d^*U) = S_{gf}(d^*U')$$

Genauer genommen werden die Gribov-Kopien hier sogar durch eine ganze Gruppe von Eichtransformationen erzeugt, die ich im folgenden Grib nennen werde:

$$\underline{\text{Grib}} = \{g \in \mathcal{G} \mid d^*dg = \mathbb{1}\} \quad (1.29)$$

$\mathcal{G}$ ist hier die Gruppe aller Eichtransformationen und $\mathbb{1}$ das Einselement von $\mathcal{G}$. Die Invarianz von S_{gf} unter Grib bzw. die Tatsache, daß Grib $\subset \mathcal{G}$ eine Untergruppe ist, folgen aus den Homomorphismeigenschaften von d und d^* . Für $g \in \underline{\text{Grib}}$ gilt:

$$d^*U' = d^*(Udg) = d^*U d^*dg = d^*U$$

Weiter ist $d^*d(g.g') = (d^*dg)(d^*dg')$ und $d^*d\mathbb{1} = \mathbb{1}$, also ist $d^*d : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ ein Homomorphismus und damit Grib eine Gruppe^(*).

Daß das Auftreten von Gribov-Kopien Erwartungswerte eichinvarianter Funktionen nicht beeinflußt (solange der Grad der Eichfixierungsfunktion ungleich Null ist), wurde von [Sharpe 1984] gezeigt (s. auch [Nill 1985]). Betrachtet man jedoch eichabhängige Größen wie z.B. die Erwartungswerte $\langle \phi_x \rangle$ oder $\langle \bar{\phi}_x \phi_y \rangle$, so ändert sich der Sachverhalt grundsätzlich. Während in der naiven Störungstheorie unter Vernachlässigung der Gribov-Kopien diese Erwartungswerte immer ungleich Null sind, werde ich in Kapitel 3 für einen großen Parameterbereich der Kopplungskonstanten zeigen, daß sie in Wirklichkeit identisch verschwinden.

Das Studium der kompakten abelschen Modelle lohnt sich also in zweierlei Hinsicht: Erstens bieten sie einen vereinfachten Hintergrund, auf dem man auch typische nicht-abelsche Phänomene wie Confinement und Gribov-

(*) Die Gruppenmultiplikationen sind hier punkt- bzw. linkweise zu verstehen: $(Udg)_{xy} = U_{xy}(dg)_{xy}$, $(gg')_x = g_x g'_x$

Kopien studieren kann. Zweitens liefern sie einen Test, inwiefern verschiedene Gitterapproximation desselben Kontinuummodells unterschiedliche physikalische Aussagen liefern können. Ob diese Unterschiede auch in einem evt. Kontinuumslimit erhalten bleiben, ist bis heute offen. Da nicht-abelsche Modelle in der Gittereichtheorie bis jetzt nur in der kompakten Version vernünftig formuliert werden konnten, hofft man natürlich, diese Frage letztlich verneinen zu können.

KAPITEL 2

DAS NICHT-KOMPAKTE MODELL

In diesem Kapitel wird die Frage der spontanen Symmetriebrechung und des Higgsmechanismus im nicht-kompakten Modell (1.23) (und einigen Varianten davon) untersucht. Es zeigt sich als eine Art Analogon zum Mermin-Wagner Theorem, daß für α -Eichungen mit $\alpha > 0$ die globale Symmetrie in $d \leq 4$ Dimensionen grundsätzlich nicht gebrochen ist. In der Landau-Eichung ($\alpha = 0$) dagegen scheint sich im Erwartungswert von ϕ tatsächlich ein guter Ordnungsparameter zur Beschreibung der beiden Phasen in diesem Modell zu ergeben. Unter Zuhilfenahme der Methoden von [Kennedy, King 1986] werde ich für den Parameterbereich e^2 klein und v^2 groß die Existenz einer Higgsphase zeigen, die u.a. durch einen nicht verschwindenden Vakuum Erwartungswert von ϕ in Landau-Eichung gekennzeichnet ist. Dies ergänzt auch einen Nachweis der Higgsphase bei kleinen λ von [Balaban et al. 1984]. Umgekehrt werde ich zeigen, daß in diesem Modell unabhängig vom Higgspotential kein Higgsmechanismus auftreten kann, falls e^2 groß genug ist. Das System ist dann vielmehr in seiner Coulombphase, und es gilt $\langle \phi \rangle = 0$ auch in Landau Eichung. Dies ergänzt einen Nachweis der Coulombphase für kleine bzw. negative v^2 von [Brydges, Seiler 1985] sowie den Beweis von [Kennedy, King 1986], daß dort ebenfalls keine spontane Symmetriebrechung auftritt. Im Abschnitt 2.4 wende ich mich den magnetischen Eigenschaften der Higgsphase zu und zeige, daß dort Meissner-Effekt wie auch eine magnetische Flußquantisierung auftreten, während in der Coulombphase bei kleinen v^2 der magnetische Fluß näherungsweise linear vom äußeren Magnetfeld abhängt. Des weiteren erweist sich auch die freie Energie einer einzelnen Vortexlinie bzw. des sog. 't Hooft-Loops als ein geeigneter (Un-)Ordnungsparameter zur Unterscheidung zwischen den beiden Phasen. Dies werde ich im Abschnitt 2.5 schließlich ausnützen, um zusammen mit dem Erwartungswert von ϕ neue und relativ enge Schranken an den Verlauf der Phasentrennlinie in einem leicht variierten Modell herzuleiten. Ebenfalls in § 2.5 diskutiere ich anschließend die Frage, inwieweit sich diese Methoden auch auf (feldtheoretische) Temperatur $T > 0$ und in diesem Zusammenhang auf den Limes kontinuierlicher euklidischer Zeit übertragen lassen. Durch die Verallgemeinerung

einer Dualitätstransformation auf unsymmetrische Gitterkonstanten gelingt es, entsprechende Ergebnisse von [Borgs, Seiler 1983] für das kompakte reine $U(1)$ -Eichmodell zur Anwendung zu bringen. Insbesondere gibt es zu jedem Wert von $e^2 > 0$ eine Temperatur T , oberhalb derer - basierend auf dem 't Hooft-Loop - unabhängig vom Higgspotential keine Higgsphase mehr auftritt.

Die wichtigsten Ergebnisse habe ich als Theoreme formuliert, deren Inhalt hier für einen Überblick stichwortartig zusammengefaßt ist:

- Theorem 2.4/5 : $\langle \Phi \rangle_\alpha = 0, \alpha > 0$
- Theorem 2.7 : $\langle \Phi \rangle_{\text{Landau}} = 0$ in der Higgsphase
- Theorem 2.17 : 'Massen-Gap' in der Higgsphase
- Theorem 2.21 : Nachweis einer Coulombphase
- Theorem 2.25 : $\langle \Phi \rangle_{\text{Landau}} = 0$ in der Coulombphase
- Theorem 2.26 : Meissner-Effekt in der Higgsphase
- Theorem 2.27 : Kleine Suszeptibilität in der Coulombphase
- Theorem 2.28 : 'Perimeter-Law'^(*) in der Coulombphase
- Theorem 2.29 : 'Area-Law'^(*) in der Higgsphase
- Theorem 2.30 : Schranken an die Phasentrennlinie
- Theorem 2.33 : Phasendiagramm bei Temperatur $T > 0$.

Abschließend sei hiermit vereinbart, daß bis auf Weiteres nur noch umskalierte Vektorpotentiale

$$A \rightarrow A' = e A$$

verwendet werden. Dies bedeutet, daß die Kopplungskonstante e in der kovarianten Ableitung verschwindet und dafür im elektromagnetischen Teil der Wirkung wieder auftaucht als

$$\frac{1}{2e^2} (\|dA\|^2 + \frac{1}{\alpha} \|d^*A\|^2)$$

(*) für den 't Hooft-Loop

2.1. Keine Symmetriebrechung für $\alpha > 0$

Die prinzipielle Idee ist nahezu trivial und sei hier unter Vernachlässigung mathematischer Feinheiten wie Randbedingungen etc. vorangestellt (vgl. [Borgs, Nill 1986c]):

$$\langle \phi_x \rangle_\alpha = \frac{1}{Z} \int D\mathcal{H} D\phi \phi_x e^{S_{\text{inv}}} e^{-\frac{1}{2\alpha e^2} \|d^* \mathcal{H}\|^2}$$

Wir schieben nun im Zähler und Nenner die Eins ein in der Form

$$1 = (\det \Delta) \int D\chi \delta(d^* \mathcal{H} + \Delta \chi) \quad (2.1)$$

und führen dann eine Variablentransformation $\mathcal{A}' = \mathcal{A} + d\chi$, $\phi' = e^{-i\chi} \phi$ durch. Da S_{inv} eichinvariant ist, erhalten wir

$$\langle \phi_x \rangle_\alpha = \frac{1}{Z'} \int D\mathcal{H}' D\phi' D\chi \delta(d^* \mathcal{H}') \phi'_x e^{i\chi_x} e^{S_{\text{inv}}} e^{-\frac{1}{2\alpha e^2} \|d^* \mathcal{H}' - \Delta \chi\|^2}$$

wobei sich Z' durch Ersetzen von $\phi'_x e^{i\chi_x}$ durch 1 ergibt. Wegen der δ -Funktion können wir $d^* \mathcal{A}'$ im Eichfixierungsteil weglassen. Aber dann faktorisiert in Zähler und Nenner das χ -Integral vom Rest und wir erhalten

$$\langle \phi_x \rangle_\alpha = \langle \phi_x \rangle_{\text{Landau}} Z_{\text{gf}}^{-1} \int D\chi e^{i\chi_x} e^{-\frac{1}{2\alpha e^2} \|\Delta \chi\|^2}$$

mit $Z_{\text{gf}} = \int D\chi \exp[-(2\alpha e^2)^{-1} \|\Delta \chi\|^2]$. $\langle \phi_x \rangle_{\text{Landau}}$ ist der Erwartungswert in Landau-Eichung, d.h. mit Eichfixierung $\delta(d^* \mathcal{A})$. Das Gauß'sche χ -Integral kann nun sofort ausgeführt werden, und wir erhalten schließlich die Identität

$$\langle \phi_x \rangle_\alpha = \langle \phi_x \rangle_{\text{Landau}} \exp\left[-\frac{\alpha e^2}{2} (\Delta^{-2})_{xx}\right] \quad (2.2)$$

Da $(\Delta^{-2})_{xx}$ in $d \leq 4$ Dimensionen infrarot-divergent ist, folgt sofort $\langle \phi_x \rangle_\alpha = 0$ für alle $\alpha > 0$ in $d \leq 4$, also keine spontane Symmetriebrechung für $\alpha > 0$. (*)

Dieses Ergebnis ist unabhängig von der speziellen Wahl von S_{inv} , also insbesondere unabhängig von e^2 , λ , und v^2 .

(*) Zur Annahme $|\langle \phi_x \rangle_{\text{Landau}}| < \infty$ werde ich später noch etwas sagen

Ich will nun die Randbedingungen spezifizieren, für die die obigen Manipulationen als Gleichungen zwischen Erwartungswerten im endlichen Volumen gültig sind. Die nötigen Begriffsbildungen aus der algebraischen Topologie finden sich in Anhang A.

Sei $\Lambda_0 \subset \mathbb{Z}^d$ eine endliche Teilmenge und $\Lambda \subset \Lambda^\infty$ der von Λ_0 erzeugte offene Unterkomplex. Wir betrachten zunächst nur den Raum Ω_Λ der Felder auf Λ . Das Funktionalmaß im endlichen Volumen Λ ist ein (reguläres Borel-) Maß auf Ω_Λ . Konkret gilt $D_\Lambda \phi = \prod_{x \in \Lambda_0} d\phi_x$, $D_\Lambda A = \prod_{b \in \Lambda_1} dA_b$ und die Wirkung im endlichen Volumen Λ ergibt sich durch Einschränkung der entsprechenden Operationen im unendlichen Volumen auf Ω_Λ :

$$S_{\Lambda, \alpha} = \frac{1}{2e^2} (\|dA\|_\Lambda^2 + \frac{1}{\alpha} \|d^*A\|_\Lambda^2) + \frac{1}{2} \|d_\pi \phi\|_\Lambda^2 + \sum_{x \in \Lambda_0} V(\phi_x) \quad (2.3)$$

Wenn wir uns Λ als Kasten mit Rand $\partial\Lambda$ bestehend aus $(d-1)$ -dimensionalen Rechtecken vorstellen, dann bedeutet ' Λ offen', daß alle Punkte, Bonds, Plaketten etc. aus $\partial\Lambda$ nicht zu Λ gehören. Insbesondere ist in den l^2 -Normen $\|\cdot\|_\Lambda^2$ also auch nicht über diese Zellen zu summieren, obwohl beispielsweise für $A \in \Omega_\Lambda^1$ die Divergenz d^*A dort im allgemeinen nicht-verschwindende Werte annehmen würde. In einem abstrakteren Formalismus (s. Anhang A) sollte man d_Λ , d_Λ^* und $d_{\Lambda, A}$ schreiben: Dies entspräche 0-Dirichlet-Randbedingungen. Auf den Plaketten bzw. Bonds, die den Rand $\partial\Lambda$ berühren, aber selbst noch zu Λ gehören, sind diese Ableitungen zu berechnen, indem man den Feldern A und ϕ auf dem Rand $\partial\Lambda$ den Wert Null zuordnet. Allgemeiner werde ich dort auch beliebige, aber feste Randkonfigurationen $\hat{A}, \hat{\phi}$ zulassen. Die entsprechenden Erwartungswerte als Funktionen dieser Randbedingungen bezeichne ich dann mit $E_{\Lambda, \alpha}^{\partial\Lambda}(\cdot | \hat{A}, \hat{\phi})$. Weiter führe ich für positive, ganzzahlige Funktionen q auf Λ_0 (d.h. positive 0-Koketten $q \in \Omega_\Lambda^0(\mathbb{Z})$) die Schreibweise

$$\begin{aligned} \Phi^q &:= \prod_x \phi(x)^{q(x)} \\ R^q &:= \prod_x R(x)^{q(x)} \end{aligned}$$

ein (analog für $\bar{\phi}$). Hiermit gilt:

Satz 2.1: Für beliebige Randkonfigurationen $\hat{A}, \hat{\Phi}$ auf $\partial\Lambda$ gilt:

- i)
$$E_{\Lambda, \alpha}^{\partial\Lambda}(\phi^{q_1} \bar{\phi}^{q_2} | \hat{A}, \hat{\Phi}) = E_{\Lambda, \alpha=0}^{\partial\Lambda}(\phi^{q_1} \bar{\phi}^{q_2} | \hat{A}, \hat{\Phi}) e^{-\frac{\alpha e^2}{2}(q, \Delta_{\Lambda}^{-2} q)}$$

für alle positiven $q_i \in \Omega_{\Lambda}^{\circ}(\mathbb{Z})$ mit $q = q_1 - q_2$.
- ii)
$$E_{\Lambda, \alpha}^{\partial\Lambda}(f | \hat{A}, \hat{\Phi}) = E_{\Lambda, \alpha=0}^{\partial\Lambda}(f | \hat{A}, \hat{\Phi})$$

für alle eichinvarianten Observablen in Λ .

Insbesondere sind also die Erwartungswerte eichinvarianter Observabler von α unabhängig.

Beweis:

Zunächst möchte ich anmerken, daß der Laplace-de Rham-Operator $\Delta_{\Lambda} = d_{\Lambda} d_{\Lambda}^* + d_{\Lambda}^* d_{\Lambda}$ in einem endlichen offenen Unterkomplex $\Lambda \subset \Lambda^{\infty}$ auf $\Omega_{\Lambda}^{\nu}(\mathbb{R})$ für alle $0 \leq \nu \leq d-1$ invertierbar ist (siehe z.B. [Guth 1980]). Insbesondere ist also der in den A's quadratische Anteil in der Wirkung nicht entartet mit Kovarianz $e^2 \Delta_{\Lambda}^{-1} (d_{\Lambda}^* \Delta_{\Lambda}^{-1} d_{\Lambda} + d_{\Lambda} \Delta_{\Lambda}^{-1} d_{\Lambda}^*)_{\Lambda}$ und die betrachteten Integrale daher endlich. Weiter ist die Gruppe der Eichtransformationen in Λ gegeben durch $\mathcal{G} = \Omega_{\Lambda}^0$. Mit $A \mapsto A + d_{\Lambda} \chi, \Phi \mapsto \exp(-i\chi)\Phi$ werden die Randwerte $\hat{A}, \hat{\Phi}$ für $\chi \in \Omega_{\Lambda}^0$ also nicht mittransformiert. Hiermit sind die Schritte zur Herleitung von (2.2) für die Funktionalintegrale im endlichen Volumen exakt durchführbar. Unter Beachtung der Transformation $\phi^{q_1 - q_2} \rightarrow \exp(-i(\chi, q)) \phi^{q_1 - q_2}$ erhält man sofort (2.1i). Für (2.1ii) verfähre man analog und beachte, daß wegen der Eichinvarianz von f die χ -Integrale sich jetzt direkt wegekürzen. ▀

Bemerkung:

Die Identität (2.1) kann geometrisch auch folgendermaßen interpretiert werden: Bezüglich der l^2 -orthogonalen Zerlegung $\Omega_{\Lambda}^1 = \text{Ker } d_{\Lambda}^* \oplus \text{Im } d_{\Lambda_0} = \text{Ker } d_{\Lambda}^* \oplus \mathcal{G}_{\Lambda}$ spaltet das Maß $D_{\Lambda} A$ (aufgefaßt als l^2 -metrische Volumenform) auf in $D_{\Lambda} A = (\det \Delta_{\Lambda}) D_{\Lambda} A \mathcal{S}(d_{\Lambda}^* A) D_{\Lambda} \chi$, wobei $(\det \Delta_{\Lambda})^{1/2} D_{\Lambda} A \mathcal{S}(d_{\Lambda}^* A)$ die l^2 -metrische Volumenform auf $\text{Ker } d_{\Lambda}^*$, und $(\det \Delta_{\Lambda_0})^{1/2} D_{\Lambda} \chi$ die l^2 -metrische Volumenform auf $\text{Im } d_{\Lambda}$ $\cong \mathcal{G}_{\Lambda}$ darstellt.

Da $\phi^q | \bar{\phi}^{q_2}$ sich unter globalen Eichtransformationen immer dann nicht-trivial transformiert, wenn $\sum_x q_1(x) \neq \sum_x q_2(x)$, also $\sum_x q(x) \neq 0$, und da in $d \leq 4$ Dimensionen für solche q der Limes $\lim_{\Lambda \uparrow \infty} (q, \Delta_{\Lambda}^{-2} q) = \infty$ divergiert^(*), haben wir hiermit für eine große Klasse von Randbedingungen gezeigt, daß in $d \leq 4$ für $\alpha > 0$ die globale Symmetrie nicht spontan gebrochen ist. Einen alternativen Beweis, der sich auch auf diese Randbedingungen verallgemeinern läßt, findet man in [Kennedy, King 1986].

Man könnte nun freilich die Randwerte $\hat{A}, \hat{\phi}$ mit $\Lambda \uparrow \infty$ so stark anwachsen lassen, daß die entsprechenden Erwartungswerte in Landau-Eichung divergieren. Wegen $|\langle \phi^q | \bar{\phi}^{q_2} \rangle_{\alpha}| \leq \langle R^q | + q_2 \rangle_{\alpha}$, wobei $\phi = \text{Re } i^p$, will ich diese unphysikalischen Zustände in Zukunft ausschließen, indem ich für die Erwartungswerte der eichinvarianten Observablen R^q , $q \in \Omega_{\Lambda}^0(N_0)$, die Stabilitätsbedingung

$$\langle R^q \rangle_{\alpha} < \infty \quad (2.4)$$

postuliere, wobei von jetzt an mit $\langle \cdot \rangle_{\alpha}$ Zustände im unendlichen Volumen bezeichnet werden.

Unabhängig davon müssen wir aber, um zum allgemeinsten Satz über die Abwesenheit spontaner Symmetriebrechung zu kommen, noch allgemeinere Randbedingungen zulassen. Ich will Gibbs-Zustände im unendlichen Volumen zur Wirkung S_{α}

betrachten, wie sie etwa durch die DLR-Gleichungen [Dobrushin 1968, Lanford Ruelle 1969] charakterisiert werden. Hierzu ist es notwendig, alle Terme in

(*) Das entsprechende Fourierintegral $\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{dk}{2\pi}\right)^d |\tilde{J}(k)|^2 |\tilde{q}(k)|^2$ ist mit $\tilde{J}(k) = \sum_{\mu=0}^{d-1} (2 - 2\cos k_{\mu})$ in $d \leq 4$ infrarot-divergent, falls $\tilde{q}(0) \neq 0$.

S_α mitzunehmen, die durch eine fest vorgegebene Feldkonfiguration auf $\Lambda^\infty \setminus \Lambda$ noch nicht vollständig fixiert sind. Der Eichfixierungsteil in der Wirkung muß also im Volumen Λ ersetzt werden durch

$$\frac{1}{2\alpha e^2} \|d^* H\|_\Lambda^2 + \frac{1}{2\alpha e^2} \sum_{x \in (\partial\Lambda)_0} \left(\sum_{Y: \langle Yx \rangle \in \Lambda_1} H_{Yx} + \sum_{Y: \langle Yx \rangle \in \Lambda_1^c} \hat{H}_{Yx} \right)^2 \quad (2.5a)$$

Hierbei ist $\hat{A}$ die auf $\Lambda_1^c := \Lambda_1^\infty \setminus \Lambda_1$ vorgegebenen Randkonfiguration. Wenn wir $\hat{\Lambda} \subset \Lambda^\infty$ als den kleinsten offenen Unterkomplex definieren, der $\Lambda \cup \mathcal{M}$ enthält (d.h. $\hat{\Lambda}$ ist in etwa der um eine Einheit vergrößerte Kasten, s. Fig. 1), so läßt sich (2.5a) auch schreiben als

$$\frac{1}{2\alpha e^2} \|d^*(i_\Lambda H + i_{\Lambda^c} \hat{H})\|_{\hat{\Lambda}}^2 \quad (2.5b)$$

wobei $i_\Lambda : \Omega_\Lambda^\nu \rightarrow \Omega_{\Lambda^\infty}^\nu$ die kanonische Einbettung bezeichnet (entsprechend für Λ^c). Um zu einer einheitlichen Darstellung der neuen bedingten Erwartungswerte zu kommen, beachten wir, daß die Plakettenvariablen auf $\hat{\Lambda}_2 \setminus \Lambda_2$ durch Vorgabe der A 's auf Λ_1^c bereits vollständig fixiert sind. Wir können sie daher genauso gut mit in die Wirkung aufnehmen, da sie sich bei der Berechnung von Erwartungswerten wieder wegekürzen. Analog können wir auch den Higgsteil der Wirkung über $\hat{\Lambda}_1$ bzw. $\hat{\Lambda}_0$ summieren. Die entsprechenden bedingten Erwartungswerte sind jetzt Funktionen der Felder $(\hat{A}, \hat{\Phi})$ auf dem erweiterten Rand $\hat{\partial}\Lambda := \hat{\Lambda} \setminus \Lambda$, und ich bezeichne sie mit $E_{\Lambda, \alpha}(\cdot | \hat{H}, \hat{\Phi})$, d.h.

$$E_{\Lambda, \alpha}(\cdot | \hat{H}, \hat{\Phi}) := Z_{\Lambda, \alpha}(\hat{H}, \hat{\Phi})^{-1} \int_{\hat{\Lambda}} D\hat{H} D\hat{\Phi} \delta_{\hat{\partial}\Lambda}(\hat{H} - \hat{H}) \delta_{\hat{\partial}\Lambda}(\hat{\Phi} - \hat{\Phi}) \cdot e^{S_{\hat{\Lambda}, \alpha}} \quad (2.6)$$

wobei $S_{\hat{\Lambda}, \alpha}$ analog wie in (2.3) gegeben ist. Ich möchte darauf hinweisen, daß (2.6) nach wie vor nur Eichtransformationen in Λ zuläßt, während die Eichfixierungsfunktion jetzt auch Werte auf $\hat{\Lambda}_0 \setminus \Lambda_0$ annimmt. Im endlichen Volumen ist dies keine legitime Eichfixierung, und die Faktorisierungsformeln von Satz 2.1 gelten daher nur noch bis auf Randterme.

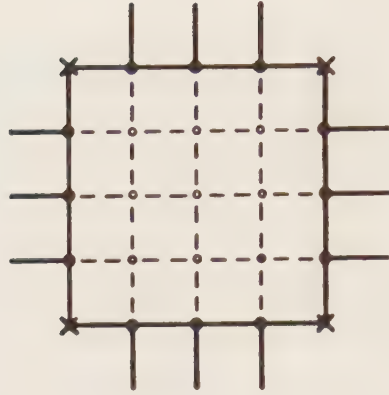


Fig. 1:

Λ_1 ist durch kleine Kreise und Λ_2 durch gestrichelte Linien gekennzeichnet. $(\partial\Lambda)_0 = (\hat{\partial}\Lambda)_0$ sind die schwarzen Punkte, während die Kreuze an den Ecken nicht mehr dazu gehören. Λ_2 sind die Plaketten, die mindestens eine gestrichelte Linie aus Λ_1 in ihrem Rand enthalten. Die durchgezogenen Linien gehören zu $(\partial\Lambda)_1$, und zu $(\partial\Lambda)_1 \not\subset (\hat{\partial}\Lambda)_1$, falls sie eine Plakette aus Λ_2 begrenzen. $(\hat{\partial}\Lambda)_2$ besteht aus allen Plaketten, die nicht in Λ_2 liegen und mindestens eine durchgezogene Linie aus $(\partial\Lambda)_1$ in ihrem Rand haben.

Satz 2.2: Zu jeder Randkonfiguration $(\hat{A}, \hat{\phi})$ auf $\hat{\partial}\Lambda$ gibt es ein Wahrscheinlichkeitsmaß $d\hat{s}_{\Lambda, \alpha}^{\hat{A}, \hat{\phi}}(\hat{\chi})$ auf $\Omega_{\partial\Lambda}^0$, so daß für $q_1 \in \Omega_{\Lambda}^0(\mathbb{N}_0)$, $q = q_1 - q_2$, und eichinvariante Observable f in Λ gilt:

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad E_{\Lambda, \alpha}(\phi^{q_1} \bar{\phi}^{q_2} | \hat{A}, \hat{\phi}) \\ = e^{-\frac{\alpha}{2} \epsilon^2(q, C_{\Lambda} q)} \int d\hat{s}_{\Lambda, \alpha}^{\hat{A}, \hat{\phi}}(\hat{\chi}) e^{i(R_{\Lambda} \hat{\chi}, q)} E_{\Lambda, \alpha=0}(\phi^{q_1} \bar{\phi}^{q_2} | \hat{A} + d\hat{\chi}, e^{-i\hat{\chi}} \hat{\phi}) \end{aligned}$$

Hierbei ist $C_{\Lambda} = (\Delta_{\Lambda}^2 + S_{\Lambda}^* S_{\Lambda})^{-1}$ und $S_{\Lambda} : \Omega_{\Lambda}^0 \rightarrow \Omega_{\partial\Lambda}^0$ sowie $R_{\Lambda} : \Omega_{\partial\Lambda}^0 \rightarrow \Omega_{\Lambda}^0$ sind lineare Operatoren.

$$\text{ii)} \quad E_{\Lambda, \alpha}(f | \hat{A}, \hat{\phi}) = \int d\hat{s}_{\Lambda, \alpha}^{\hat{A}, \hat{\phi}}(\hat{\chi}) E_{\Lambda, \alpha=0}(f | \hat{A} + d\hat{\chi}, e^{-i\hat{\chi}} \hat{\phi})$$

Bemerkung:

Aus Satz 2.2ii wird erkenntlich, daß im endlichen Volumen Erwartungswerte eichinvarianter Observabler unter diesen allgemeinsten Randbedingungen nicht mehr von α unabhängig sind. Das müssen wir unweigerlich in Kauf nehmen, wenn wir Aussagen über allgemeine Gibbs-Zustände zur eichfixierten Wirkung S_{α} auf der vollen Feldalgebra machen wollen.

Beweis:

Wir setzen in (2.6) wieder die Eins ein, diesmal in der etwas komplizierteren Form

$$1 = (\det \Delta_{\hat{\Lambda}}) \int D_{\partial\Lambda} \hat{\chi} \delta_{\partial\Lambda}(\chi - \hat{\chi}) D_{\hat{\Lambda}} \chi \delta(d_{\hat{\Lambda}}^* A + \Delta_{\hat{\Lambda}} \chi)$$

und führen dann, wie gehabt, die Variablentransformation $A' = A + d_{\hat{\Lambda}} \chi$, $\phi' = e^{-i\chi} \phi$ durch. Wegen der δ -Funktion $\delta_{\partial\Lambda}(\chi - \hat{\chi})$ dürfen wir die Randterme mit $\hat{\chi}$ statt mit χ transformieren und erhalten:

$$\begin{aligned} & E_{\Lambda, \alpha}(\phi^q \bar{\phi}^{\bar{q}} | H, \hat{\phi}) \\ &= (\det \Delta_{\hat{\Lambda}}) Z_{\Lambda, \alpha}(\hat{H}, \hat{\phi})^{-1} \int D_{\partial\Lambda} \hat{\chi} D_{\hat{\Lambda}} H' D_{\hat{\Lambda}} \phi' \delta(d_{\hat{\Lambda}}^* H') \delta_{\partial\Lambda}(H' - \hat{H} - d\hat{\chi}) \\ & \quad \delta_{\partial\Lambda}(\phi' - e^{-i\hat{\chi}} \hat{\phi}) \phi^q \bar{\phi}^{\bar{q}} e^{S_{\hat{\Lambda}}, \text{inv}} \int D_{\hat{\Lambda}} \chi \delta_{\partial\Lambda}(\chi - \hat{\chi}) e^{i(\chi, q)} e^{-\frac{1}{2\alpha\epsilon^2} \|\Delta_{\hat{\Lambda}} \chi\|_{\hat{\Lambda}}^2} \\ &= (\det \Delta_{\hat{\Lambda}}) Z_{\Lambda, \alpha}(\hat{H}, \hat{\phi})^{-1} \int D_{\partial\Lambda} \hat{\chi} E_{\Lambda, \alpha=0}(\phi^q \bar{\phi}^{\bar{q}} | \hat{H} + d\hat{\chi}, e^{-i\hat{\chi}} \hat{\phi}) \\ & \quad Z_{\Lambda, \alpha=0}(\hat{H} + d\hat{\chi}, e^{-i\hat{\chi}} \hat{\phi}) \int D_{\hat{\Lambda}} \chi e^{i(\chi, q)} e^{-\frac{1}{2\alpha\epsilon^2} (\|\Delta_{\hat{\Lambda}} \chi - S_{\hat{\Lambda}}^* \chi\|_{\hat{\Lambda}}^2 + \|\mathcal{T}_{\partial\Lambda} \hat{\chi} - S_{\hat{\Lambda}} \chi\|_{\partial\Lambda}^2)} \end{aligned}$$

Hierbei haben wir $\|\Delta_{\hat{\Lambda}} \chi\|_{\hat{\Lambda}}^2$ zerlegt in eine Summe über Λ , plus eine Summe über $(\partial\Lambda)_0$ und beachtet, daß χ auf $(\partial\Lambda)_0$ gleich $\hat{\chi}$ zu setzen ist. Der Laplace-Operator $\Delta_{\hat{\Lambda}}$ mit Dirichlet-Randbedingungen auf $\partial\hat{\Lambda}$ spaltet sich dabei auf in $\Delta_{\hat{\Lambda}}$ mit Dirichlet-Randbedingungen auf $\partial\Lambda$ plus einen Rest wie angegeben, wobei

$$(S_{\hat{\Lambda}} \chi)(x) := \sum_{Y: \langle Yx \rangle \in \Lambda} \chi(Y), \quad x \in (\partial\Lambda)_0$$

und $\mathcal{T}_{\partial\Lambda}: \Omega_{\partial\Lambda}^0 \rightarrow \Omega_{\partial\Lambda}^0$ mit

$$(\mathcal{T}_{\partial\Lambda} \hat{\chi})(x) := 2d\hat{\chi}(x) - \sum_{Y \in (\partial\Lambda)_0: \langle xY \rangle \in \hat{\Lambda}} \hat{\chi}(Y)$$

Das Gauß'sche χ -Integral kann durch quadratische Ergänzung berechnet werden und ergibt

$$e^{i(R_{\hat{\Lambda}} \hat{\chi}, q)} e^{-\frac{\alpha\epsilon^2}{2}(q, C_{\hat{\Lambda}} q)} Z_{\Lambda, \alpha}^{\text{Gauß}}(\hat{\chi})$$

mit

$$Z_{\Lambda, \alpha}^{\text{Gauß}}(\hat{\chi}) = \int D_{\hat{\Lambda}} \chi \delta_{\partial \Lambda}(\chi - \hat{\chi}) e^{-\frac{1}{2\alpha} \|\Delta_{\hat{\Lambda}} \chi\|_{\hat{\Lambda}}^2}$$

$$C_{\Lambda} = (\Delta_{\Lambda}^2 + S_{\Lambda}^* S_{\Lambda})^{-1}$$

$$R_{\Lambda} = C_{\Lambda} (\Delta_{\Lambda} S_{\Lambda}^* + S_{\Lambda}^* T_{\partial \Lambda})$$

Hieraus folgt (2.2i) mit (*)

$$dS_{\Lambda, \alpha}^{\hat{H}, \hat{\Phi}}(\hat{\chi}) = (\det \Delta_{\hat{\Lambda}}) Z_{\Lambda, \alpha}(\hat{H}, \hat{\Phi})^{-1} Z_{\Lambda, \alpha=0}(\hat{H} + d\hat{\chi}, e^{-i\hat{\chi}} \hat{\Phi}) Z_{\Lambda, \alpha}^{\text{Gauß}}(\hat{\chi}) D_{\partial \Lambda} \hat{\chi}$$

Für eichinvariante f folgt mit der analogen Argumentationsweise sofort (2.1ii). Indem wir schließlich $f = 1$ wählen, sehen wir, daß $dS_{\Lambda, \alpha}^{\hat{H}, \hat{\Phi}}$ in der Tat ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist. $\square$

Korollar 2.3: Im thermodynamischen Limes gilt für jeden Gibbs-Zustand

$\langle \cdot \rangle_{\alpha}$ zur Wirkung S_{α} , der der Stabilitätsbedingung (2.4) genügt:

$$|\langle \phi^{q_1} \bar{\phi}^{q_2} \rangle_{\alpha}| \leq \langle R^{q_1, q_2} \rangle_{\alpha} \lim_{\Lambda \uparrow \Lambda_{\infty}} \exp\left[-\frac{\alpha \varepsilon^2}{2} (q, C_{\Lambda} q)\right]$$

Beweis:

Zunächst gilt nach Satz 2.2 in jedem endlichen Volumen Λ , das den Träger von $q_1 + q_2$ enthält

$$\begin{aligned} & |E_{\Lambda, \alpha}(\phi^{q_1} \bar{\phi}^{q_2} | \hat{H}, \hat{\Phi})| \\ & \leq e^{-\frac{\alpha \varepsilon^2}{2} (q, C_{\Lambda} q)} \int dS_{\Lambda, \alpha}^{\hat{H}, \hat{\Phi}}(\hat{\chi}) |E_{\Lambda, \alpha=0}(\phi^{q_1} \bar{\phi}^{q_2} | \hat{H} + d\hat{\chi}, e^{-i\hat{\chi}} \hat{\Phi})| \\ & \leq e^{-\frac{\alpha \varepsilon^2}{2} (q, C_{\Lambda} q)} \int dS_{\Lambda, \alpha}^{\hat{H}, \hat{\Phi}}(\hat{\chi}) E_{\Lambda, \alpha=0}(R^{q_1, q_2} | \hat{H} + d\hat{\chi}, e^{-i\hat{\chi}} \hat{\Phi}) \end{aligned}$$

(*) Genaugenommen ist $E_{\Lambda, \alpha=0}(\cdot | \hat{H}, \hat{\Phi})$ nur wohl definiert auf dem Raum solcher $\hat{A} \in \Omega_{\partial \Lambda}^1$, die sich zu einer divergenzfreien Konfiguration auf $\hat{\Lambda}$ fortsetzen lassen. Anders ausgedrückt beinhaltet die Zustandssumme $Z_{\Lambda, \alpha=0}(\hat{A}, \hat{\Phi})$, aufgefaßt als 'Dichte' bezüglich des Maßes $D_{\partial \Lambda} \hat{A} D_{\partial \Lambda} \hat{\Phi}$, eine δ -Funktion auf diesen Unterraum. Entsprechendes gilt für $dS_{\Lambda, \alpha}^{\hat{H}, \hat{\Phi}}(\hat{\chi})$.

$$= e^{-\frac{\alpha \varepsilon^2}{2}(q, C_\lambda q)} E_{\lambda, \alpha}(\mathbb{R}^{q_1+q_2} | \hat{H}, \hat{\Phi})$$

Da Ungleichungen stabil unter Grenzwertbildung sind, können wir auf beiden Seiten den thermodynamischen Limes durchführen. $\square$

Bemerkung:

Der Grenzwert $\lim_{\lambda \uparrow \lambda^\infty} \exp\left[-\frac{\alpha \varepsilon^2}{2}(q, C_\lambda q)\right]$ existiert und ist translationsinvariant, da $(q, C_\lambda q)$ monoton im Volumen steigt (s. Anhang B).

Hiermit komme ich zur ersten zentralen Aussage.

Theorem 2.4: Im abelschen nicht-kompakten Higgsmodell auf dem Gitter ist in $d \leq 4$ Dimensionen jeder Gibbs-Zustand $\langle \cdot \rangle_\alpha$ zur eichfixierten Wirkung S_α (1.23), der der Stabilitätsbedingung (2.4) genügt, invariant unter globalen Eichtransformationen, falls $\alpha > 0$.

Beweis:

Da jeder Gibbs-Zustand durch seine Werte auf der lokalen, polynomialen Algebra in den Feldern A und Φ eindeutig bestimmt ist, genügt es, die Monome $A^j \Phi^{q_1} \bar{\Phi}^{q_2}$ für beliebige $j \in \Omega_\lambda^1(\mathbb{N}_0)$, $q_i \in \Omega_\lambda^0(\mathbb{N}_0)$, $\Lambda \subset \Lambda^\infty$ endlich und offen zu betrachten. Der positive und negative Anteil von A^j kann jeweils monoton durch Funktionen aus $L^2(D_\lambda A)$ approximiert werden:

$$H^j = \lim_{m \rightarrow \infty} \int D_\lambda h (2\pi)^{-|\Lambda|} f_m(h) e^{i(H, h)}$$

mit

$$f_m(h) = \int D_\lambda H e^{-i(H, h)} H^j e^{-\frac{1}{2m} \|H\|_\lambda^2}$$

Mit Hilfe des Monotone-Konvergenzen-Theorems dürfen wir den Limes $m \rightarrow \infty$ aus dem Erwartungswert $\langle \cdot \rangle_\alpha$ ziehen. Da f_m aus $L^1(D_\Lambda h)$ ist, können wir weiter das Fubini-Theorem anwenden und uns somit überzeugen, daß es genügt, Erwartungswerte von $e^{i(A,h)} \phi^{q_1} \bar{\phi}^{q_2}$ für $h \in \Omega_\Lambda^1(\mathbb{R})$ zu betrachten. Da unter Eichtransformationen $e^{i(A,h)}$ in $e^{i(A,h)} e^{i(\chi, d^* h)}$ übergeht, gilt für diese Erwartungswerte im endlichen Volumen Satz 2.2i analog, wenn wir $q = q_1 - q_2 - d^* h$ setzen. Wegen $|e^{i(\pi, h)} \phi^{q_1} \bar{\phi}^{q_2}| = R^{q_1+q_2}$ gilt schließlich genauso wie in Korollar 2.3

$$|\langle e^{i(\pi, h)} \phi^{q_1} \bar{\phi}^{q_2} \rangle_\alpha| \leq \langle R^{q_1+q_2} \rangle_\alpha \lim_{\Lambda \uparrow \Lambda^\infty} e^{-\frac{\alpha}{2} e^2(q, C_\Lambda q)} \quad (2.7)$$

Es bleibt also zu zeigen, daß $\lim_{\Lambda \uparrow \Lambda^\infty} (q, C_\Lambda q) = \infty$, falls $\sum_x q(x) = 0$ und $d \leq 4$. Dies scheint intuitiv klar zu sein, da bis auf Randterme $C_\Lambda \approx \Delta_\Lambda^{-2}$. Der Beweis ist leider sehr technisch und wird daher in Anhang B geführt. $\square$

Nun wird häufig in der Feldtheorie und auch in der statistischen Mechanik die Frage der spontanen Symmetriebrechung durch Anlegen eines äußeren Feldes und Betrachtung von $\langle \phi \rangle_J$ im Limes $J \rightarrow 0$ untersucht. In Heisenbergschen oder diskreten Spinmodellen nennt man J ein äußeres 'Magnetfeld', in der Feldtheorie eine äußere Quelle. Konkret definiert man die Wirkung mit äußerem Feld J gemäß

$$S_{\Lambda, \alpha, J} := S_{\Lambda, \alpha} + \sum_{x \in \Lambda_0} J(x) \phi(x)$$

Ich bezeichne die entsprechenden Erwartungswerte im endlichen Volumen mit $E_{\Lambda, \alpha, J}(\cdot | \hat{H}, \hat{\Phi})$ und Erwartungswerte im thermodynamischen Limes (Gibbs-Zustände) mit $\langle \cdot \rangle_{\alpha, J}$.

Theorem 2.5: Theorem 2.4 gilt auch für jeden Zustand $\langle \cdot \rangle_{\alpha, J_\nu \rightarrow 0}$, der sich als Limes $\nu \rightarrow \infty$ von Gibbs-Zuständen zu äußeren Feldern $J_\nu \rightarrow 0$ ergibt und die Stabilitätsbedingung (2.4) erfüllt.

Bemerkung:

Die Notation $\langle \cdot \rangle_{\alpha, J_\nu \rightarrow 0}$ berücksichtigt die offengehaltene Möglichkeit, daß die Grenzzustände von der speziellen Folge $\langle \cdot \rangle_{\alpha, J_\nu}$ abhängen können.

Beweis: Es genügt zu zeigen, daß (2.7) auch für die neuen Zustände gilt:

$$| \langle e^{i(H,h)} \phi^{q_1} \bar{\phi}^{q_2} \rangle_{\alpha, \mathcal{J}_0 \rightarrow 0} | \leq \langle R^{q_1+q_2} \rangle_{\alpha, \mathcal{J}_0 \rightarrow 0} \lim_{\Lambda \uparrow \Lambda^\infty} e^{-\frac{\alpha e^2}{2} (q, C_\Lambda q)} \quad (2.8)$$

Hierzu gehen wir ähnlich vor wie [Borgs, Nill 1986 a] für das kompakte Modell und benützen zunächst die DLR-Gleichungen [Dobrushin 1968; Lanford, Ruelle 1969] in der Form

$$\langle e^{i(H,h)} \phi^{q_1} \bar{\phi}^{q_2} \rangle_{\alpha, \mathcal{J}} = \langle E_{\Lambda, \alpha, \mathcal{J}} (e^{i(H,h)} \phi^{q_1} \bar{\phi}^{q_2} | \hat{H}, \hat{\Phi}) \rangle_{\alpha, \mathcal{J}} \quad (2.9)$$

wobei Λ die Träger von h und q_i enthalten muß und wir den Erwartungswert in Λ als Funktion der Randwerte $\hat{A}$ und $\hat{\Phi}$ auffassen. Nun gehen wir analog vor wie zur Herleitung von Satz 2.2 und erhalten

$$\begin{aligned} & E_{\Lambda, \alpha, \mathcal{J}} (e^{i(H,h)} \phi^{q_1} \bar{\phi}^{q_2} | \hat{H}, \hat{\Phi}) \\ &= \int dP_{\Lambda, \alpha, \mathcal{J}}^{\hat{H}, \hat{\Phi}} (\hat{\chi}, H, \Phi) e^{i(H,h)} \phi^{q_1} \bar{\phi}^{q_2} E_{\Lambda, \alpha, \mathcal{J}}^{\text{Spin}} (e^{i(\chi, q)} | \hat{\chi}, 0) \end{aligned} \quad (2.10)$$

Hierbei ist $\Phi = R e^{i\varphi}$, $q = q_1 - q_2 - d^* h$ und

$$dP_{\Lambda, \alpha, \mathcal{J}}^{\hat{H}, \hat{\Phi}} = \frac{\det \Delta_{\hat{\Lambda}} Z_{\Lambda, \alpha, \mathcal{J}, \varphi}^{\text{Spin}}(\hat{\chi})}{Z_{\Lambda, \alpha, \mathcal{J}}(\hat{H}, \hat{\Phi})} D_{\partial \Lambda} \hat{\chi} D_{\hat{\Lambda}} H D_{\hat{\Lambda}} \Phi \delta(d_{\hat{\Lambda}}^* H) \delta_{\partial \Lambda} (H - \hat{H} - d \hat{\chi}) \delta_{\partial \Lambda} (t - e^{-i \hat{\chi}} \hat{\Phi})$$

$E_{\Lambda, \alpha, \mathcal{J}, \varphi}^{\text{Spin}} (\cdot | \hat{\chi}, 0)$ ist der Erwartungswert im χ -Spinmodell mit Randbedingung $\chi = \hat{\chi}$ auf $\partial \Lambda$, $\chi = 0$ auf $\partial \hat{\Lambda}$ und φ -abhängiger Wirkung im äußeren Feld

$\mathcal{J} = (\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2)$ gegeben durch

$$S_{\Lambda, \alpha, \mathcal{J}, \varphi}^{\text{Spin}} = -\frac{1}{2\alpha e^2} \|\Delta_{\hat{\Lambda}} \chi\|_{\hat{\Lambda}}^2 + \sum_{x \in \hat{\Lambda}_0} [\mathcal{J}_1(x) \cos(\chi_x + \varphi_x) + \mathcal{J}_2(x) \sin(\chi_x + \varphi_x)]$$

$Z_{\Lambda, \alpha, \mathcal{J}, \varphi}^{\text{Spin}}(\hat{\chi})$ ist die zugehörige Zustandssumme und $Z_{\Lambda, \alpha, \mathcal{J}}$ die Zustandssumme des vollen Modells. Indem wir $h = q_1 = q_2 = 0$ setzen, sehen wir, daß $dP_{\Lambda, \alpha, \mathcal{J}}^{\hat{H}, \hat{\Phi}}$ wieder ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist. Für eichinvariante Observable f in folgt analog

$$E_{\Lambda, \alpha, \mathcal{J}} (f | \hat{H}, \hat{\Phi}) = \int dP_{\Lambda, \alpha, \mathcal{J}}^{\hat{H}, \hat{\Phi}} (\hat{\chi}, H, \Phi) f(H, \Phi) \quad (2.11)$$

Nun schätzen wir den Erwartungswert im χ -Spinmodell durch folgendes, im Anhang B bewiesene Lemma ab.

Lemma 2.6: Sei $q \in \Omega_{\Lambda}^{\circ}(Z)$ und $\sum_x q(x) \neq 0$

$$i) \quad |E_{\Lambda, \alpha, |\gamma|}^{\text{Spin}}(e^{i(\chi, q)} | \hat{\chi}, 0) | \leq E_{\Lambda, \alpha, |\gamma|}^{\text{Spin}}(e^{i(\chi, q)})$$

Wobei die rechte Seite bedeutet, daß wir φ und $\hat{\chi}$ gleich Null und $\gamma = (|\gamma|, 0)$ setzen.

$$ii) \quad E_{\Lambda, \alpha, |\gamma|}^{\text{Spin}}(e^{i(\chi, q)}) \text{ ist monoton steigend in } \gamma.$$

Hiermit erhalten wir die Abschätzung

$$\begin{aligned} & |E_{\Lambda, \alpha, \gamma}(e^{i(\pi, h)} \phi^{q_1} \bar{\phi}^{q_2} | \hat{H}, \hat{\Phi})| \\ & \leq \int dP_{\Lambda, \alpha, \gamma}^{\hat{H}, \hat{\Phi}}(\hat{\chi}, \pi, \Phi) R^{q_1+q_2} E_{\Lambda, \alpha, |\gamma| R}^{\text{Spin}}(e^{i(\chi, q)}) \\ & = E_{\Lambda, \alpha, \gamma}(R^{q_1+q_2} E_{\Lambda, \alpha, |\gamma| R}^{\text{Spin}}(e^{i(\chi, q)}) | \hat{H}, \hat{\Phi}) \end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichung aus (2.11) folgt, da der Integrand nur noch von R abhängt und somit eichinvariant ist. Unter Verwendung der DLR-Gleichung (2.9) folgt schließlich

$$| \langle e^{i(\pi, h)} \phi^{q_1} \bar{\phi}^{q_2} \rangle_{\alpha, \gamma} | \leq \langle R^{q_1+q_2} E_{\Lambda, \alpha, |\gamma| R}^{\text{Spin}}(e^{i(\chi, q)}) \rangle_{\alpha, \gamma}$$

Wegen der Monotonieeigenschaft (Lemma 2.6ii) dürfen wir den Strom $|\gamma|$ im χ -Spinmodell zunächst festhalten, während wir ihn im vollen Zustand gegen Null gehen lassen:

$$| \langle e^{i(\pi, h)} \phi^{q_1} \bar{\phi}^{q_2} \rangle_{\alpha, \gamma \rightarrow 0} | \leq \langle R^{q_1+q_2} E_{\Lambda, \alpha, |\gamma| R}^{\text{Spin}}(e^{i(\chi, q)}) \rangle_{\alpha, \gamma \rightarrow 0}$$

Nun lassen wir $|\gamma|$ gegen Null gehen. Monotone Konvergenz erlaubt es uns, diesen Limes im Erwartungswert $\langle \cdot \rangle_{\alpha, \gamma \rightarrow 0}$ durchzuführen. Für $|\gamma| = 0$ entkoppelt jedoch das χ -Spinmodell von R und wird zu einem reinen Gauß'schen Integral mit Kovarianz C_{Λ} . Da wir Λ beliebig groß wählen dürfen, folgt (2.8) und damit die Behauptung. $\blacksquare$

Ich will diesen Abschnitt mit einer Bemerkung zur Eichinvarianz abschließen. Wir haben in Satz 2.1ii) gesehen, daß Erwartungswerte von eichinvarianten Observablen in einem endlichen, offenen Unterkomplex $\Lambda \subset \Lambda^\infty$ bei Vorgabe von Randbedingungen auf $\partial\Lambda$ tatsächlich vom Eichfixierungsparameter α unabhängig sind, wenn wir $(2e^2)^{-1} \|d_\Lambda^* F\|_\Lambda^2$ als Eichfixierung verwenden. Unter dieser Bedingung hätten wir auch beliebige Unterkomplexe Λ (z.B. geschlossene, s. Balaban et al. 1984) verwenden können, solange auf ihnen keine harmonischen 1-Formen existieren, d.h. Δ_Λ auf $\Omega_\Lambda^1(\mathbb{R})$ nicht entartet ist. Falls wir den thermodynamischen Limes über solche mit der Komplexstruktur verträglichen Randbedingungen durchführen, gilt die entsprechende α -Unabhängigkeit auch im unendlichen Volumen. Wenn wir uns dagegen nicht nur auf eichinvariante Observable beschränken, sondern allgemeine Zustände auf der vollen Feldalgebra diskutieren wollen, ist es unumgänglich, daß wir $(dA)_p$ und $(d^*A)_x$ an allen Punkten bzw. Plaquetten mit in die Wirkung aufnehmen, an denen sie durch Randbedingungen noch nicht vollständig fixiert sind. Das hat unvermeidlich zur Folge, daß entweder die Plaquettenwirkung nicht mehr invariant ist unter Eichtransformationen auf den äußersten Punkten von Λ_0 , oder daß die Eichfixierungsfunktion d^*A Werte in einem Raum annimmt, der höherdimensional ist, als die zulässige Gruppe der Eichtransformationen in Λ . In jedem Fall handelt es sich dann um keine legitime Eichfixierung mehr, wie es auch in Satz 2.2ii) zum Ausdruck kommt. Ob dieser Randeffect im thermodynamischen Limes verschwindet, ist nicht bekannt. Aus Satz (2.2ii) läßt sich lediglich schließen, daß jeder Gibbs-Zustand zur Wirkung S_α bei Einschränkung auf die eichinvariante Observablenalgebra auch als Gibbs-Zustand in Landau-Eichung ($\alpha = 0$) aufgefaßt werden kann. In der Tat erfüllt er die entsprechenden DLR-Gleichungen:

$$\langle f \rangle_\alpha = \langle E_{\Lambda, \alpha=0}(f | \hat{H}, \hat{\Phi}) \rangle_\alpha$$

für alle endlichen offenen Unterkomplexe $\Lambda \subset \Lambda^\infty$, die den Träger von f enthalten. Um dies zu sehen, beachte man zunächst, daß die DLR-Gleichungen für Zustände im endlichen Volumen trivialerweise erfüllt sind:

$$E_{K, \alpha=0}(E_{\Lambda, \alpha=0}(f | \hat{H}, \hat{\Phi}) | \tilde{H}, \tilde{\Phi}) = E_{K, \alpha=0}(f | \tilde{H}, \tilde{\Phi})$$

für alle $K \supset \hat{\Lambda}$. Da $\langle \cdot \rangle_\alpha$ ein 'DLR-Zustand' zur Wirkung S_α ist, folgt für offene $K \supset \hat{\Lambda}$

$$\begin{aligned}
 & \langle E_{\Lambda, \alpha=0} (f | \hat{H}, \hat{\Phi}) \rangle_{\alpha} \\
 &= \langle E_{\kappa, \alpha} (E_{\Lambda, \alpha=0} (f | \hat{H}, \hat{\Phi}) | \tilde{H}, \tilde{\Phi}) \rangle_{\alpha} \\
 &= \langle \int dS_{\kappa, \alpha}^{\tilde{H}, \tilde{\Phi}}(\tilde{\chi}) E_{\kappa, \alpha=0} (E_{\Lambda, \alpha=0} (f | \hat{H}, \hat{\Phi}) | \tilde{H} + d\tilde{\chi}, e^{-i\tilde{\chi}} \tilde{\Phi}) \rangle_{\alpha} \\
 &= \langle \int dS_{\kappa, \alpha}^{\tilde{H}, \tilde{\Phi}}(\tilde{\chi}) E_{\kappa, \alpha=0} (f | \tilde{H} + d\tilde{\chi}, e^{-i\tilde{\chi}} \tilde{\Phi}) \rangle_{\alpha} \\
 &= \langle E_{\kappa, \alpha} (f | \tilde{H}, \tilde{\Phi}) \rangle_{\alpha} \\
 &= \langle f \rangle_{\alpha}
 \end{aligned}$$

wobei wir in der 2. und 4. Gleichung Satz 2.2ii verwendet haben. Man hätte natürlich gern, daß bei Einschränkung auf die eichinvariante Observablenalgebra durch diese Zuordnung für jedes feste α bereits alle Gibbszustände in Landau-Eichung erreicht werden. In diesem Sinne wären dann die Erwartungswerte eichinvarianter f 's tatsächlich unabhängig von α . Es würde auch genügen zu wissen, daß es nur einen (oder wenigstens nur einen translationsinvarianten) Gibbszustand in Landau-Eichung gibt. Da sich eine Umkehrung der Faktorisierungsformel 2.2ii (d.h. eine Darstellung der Erwartungswerte in Landau-Eichung mit Hilfe von Erwartungswerten in α -Eichung) zumindest mit den hier erörterten Methoden nicht herleiten läßt, werde ich diesen Punkt hier offen lassen.

2.2. Der Ordnungsparameter von Kennedy und King

Wir haben gesehen, daß spontane Symmetriebrechung für $\alpha > 0$ grundsätzlich nicht auftritt und daher zumindest nicht als eichunabhängige Charakterisierung des Higgsmechanismus tauglich ist. Ich werde in diesem Abschnitt eine Idee von [Kennedy, King 1986] vorstellen, die es erlaubt, die Frage, ob spontane Symmetriebrechung in Landau-Eichung auftritt, eichinvariant zu reformulieren. Zunächst sei erwähnt, daß in Analogie zu ferromagnetischen Spinmodellen in der Gittereichtheorie des öfteren das Abfallverhalten sog. 'eichinvarianter Zweipunktfunktionen' oder besser 'Stringobservablen'

$$\bar{\Phi}(x) e^{i(A,j)} \Phi(y) \quad (2.12)$$

im Zusammenhang mit evt. Phasenübergängen studiert werden. Hierbei ist $j \in \Omega_\Lambda^1$ eine Stromverteilung mit Quelle x und Senke y oder genauer

$$d^* j = \delta_y - \delta_x$$

Der Einfachheit halber wählt man für j eine gerichtete Verbindungslinie ('String') von x nach y bestehend aus Bonds $b \in [\Lambda,]$ d.h. $j(b)$ ist ± 1 , falls $\pm b$ in der Verbindungslinie enthalten ist und Null sonst. Somit ist $\exp i(A,j)$ nichts anderes als der Paralleltransporter von x nach y längs der Linie j und die Eichinvarianz von (2.12) daher evident. Kriterien zur Unterscheidung verschiedener Phasen, die auf solchen Observablen beruhen, wurden von [Bricmont, Fröhlich 1983] und [Fredenhagen, Marcu 1983] vorgeschlagen. Allerdings fällt der Erwartungswert dieser Observablen in jedem Fall zu Null ab, wenn $|x - y| \rightarrow \infty$ geht [Fröhlich, Morchio, Strocchi 1981]. Hier haben nun Kennedy und King ein mit einer neuen Idee zum Nachweis langreichweitiger Ordnung für das Higgsfeld. Sie wählen für j eine 'ausgeschmierte' Stromverteilung, die zwar, um Eichinvarianz zu gewährleisten, immer noch $d^* j = \delta_y - \delta_x$ erfüllt, sich aber zusätzlich als Gradientenfeld schreiben läßt:

$$j = d \Delta^{-1} q, \quad q := \delta_y - \delta_x$$

Der Punkt ist, daß in Landau-Eichung A divergenzfrei ist und daher l^2 -orthogonal auf allen Gradientenfeldern steht. Folglich

$$d^* A = 0 \Rightarrow \bar{\Phi}(x) e^{i(A, d \Delta^{-1} q)} \Phi(y) = \bar{\Phi}(x) \Phi(y)$$

d.h. in Landau-Eichung stimmt diese Observable gerade mit der normalen Zweipunktfunktion überein.

Kennedy und King analysieren nun das Abfallverhalten des Vakuumerwartungswertes dieser Zweipunktfunktion in Abhängigkeit der in den Gleichungen (1.1) - (1.3) definierten Parameter e^2, λ, v^2 . Zunächst folgt aus Korrelationsungleichungen von [Brydges, Fröhlich, Seiler 1979a], daß der Erwartungswert eine monoton fallende Funktion von e^2 ist^(*).

Für $e^2 = 0$ entkoppeln aber die Eichfelder vom Higgsfeld und man erhält die 2-Punktfunktion im reinen Φ^4 -Spinmodell. Falls dieses Modell in seiner symmetrischen Phase ist, also für kleine oder erst recht negative v^2 , fällt diese 2-Punktfunktion exponentiell auf Null ab und damit auch die Kennedy-King-Observable. Dies deutet auf Abwesenheit spontaner Symmetriebrechung und ist in Übereinstimmung mit der Tatsache, daß man im vollen Higgsmodell Coulomb-artiges Verhalten erwartet, wenn $v^2 < v_c^2(\lambda)$, dem kritischen Wert für spontane Symmetriebrechung im Spinmodell (für sehr kleine bzw. negative v^2 wurde dies von [Brydges, Seiler 1986] gezeigt, s. auch § 2.3.

Umgekehrt hat man für $v^2 > v_c^2(\lambda)$ spontane Symmetriebrechung im Spinmodell, und man weiß [Balaban et al. 1984], daß dann im vollen Modell zumindest für kleine e^2 und λ auch die Higgsphase vorliegt. Übereinstimmend damit konnten Kennedy und King zeigen, daß es ein (kleines) e_0 und ein (großes) v_0 gibt, so daß für $e^2 < e_0^2$ und $v^2 > v_0^2$ der Erwartungswert ihrer Observablen immer größer als eine positive untere Schranke bleibt. Dies ist ein Zeichen für langreichweitige Ordnung und damit spontane Symmetriebrechung. Das störungstheoretische Bild eines Zusammenhangs zwischen Higgsmechanismus und spontaner Symmetriebrechung scheint also in Landau-Eichung bestätigt zu sein.

Allerdings hatten Kennedy und King in ihrer Arbeit u.a. auch die Randbedingungen von [Balaban et al. 1984] übernommen. In der hier verwendeten

(*) Im Sinne von Beweis zu Lemma 2.6ii wählt man o.E. die Randbedingungen so, daß der Erwartungswert reell und nicht negativ ist.

Terminologie (s. Anhang A) entsprechen sie der Definition des Modells auf abgeschlossenen Unterkomplexen $\Lambda \subset \Lambda^\infty$. Da die verbleibende Symmetriegruppe bei α -Eichungen immer gegeben ist durch die Gruppe der harmonischen Eichtransformationen $\chi \in \Omega_\Lambda^0 \cap K \Delta_\Lambda$, also für abgeschlossene Λ gerade die konstanten χ , bleiben mit diesen Randbedingungen Erwartungswerte grundsätzlich invariant unter globalen Eichtransformationen. Um explizit Zustände mit $\langle \Phi(x) \rangle_{\text{Landau}} \neq 0$, also spontaner Symmetriebrechung zu konstruieren, muß man die Methoden von Kennedy und King auf den in Abschnitt 2.1 beschriebenen Formalismus der offenen Komplexe übertragen. Dies wurde in Zusammenarbeit mit Christian Borgs in [Borgs, Nill 1986 b] durchgeführt. Das dortige Resultat kann bezüglich der Translationsinvarianz noch folgendermaßen verschärft werden:

Theorem 2.7: Zu jedem $0 < \lambda < \infty$ gibt es eine Familie von translationsinvarianten Zuständen $\langle \cdot \rangle_{\alpha, \theta}$, $\theta \in [0, 2\pi)$, so daß in Landau-Eichung ($\alpha = 0$) gilt:

$$\langle \Phi(x) \rangle_{\text{Landau}, \theta} = r e^{i\theta}$$

Hierbei ist $r = 0$, falls $v^2 < v_c^2(\lambda)$, und $r > 0$, falls die Dimension $d \geq 3$ und $e^2 < e_0^2$, $v^2 > v_0^2(\lambda)$ ist, mit dimensionsabhängigen positiven Schranken $e_0, v_0(\lambda)$.

Beweis:

Der Beweis gleidert sich in folgende Schritte. Zunächst gebe ich eine neue spezielle Wahl von Randbedingungen an, für die die Erwartungswerte der Monome $\exp i(A, h) \Phi^{q_1} \bar{\Phi}^{q_2}$ für beliebige $h \in \Omega_K^1$, $q_i \in \Omega_K^0(\mathbb{N}_0)$ $K \subset \Lambda^\infty$ endlich, in jedem endlichen Volumen $\Lambda \subset \Lambda^\infty$ offen, $K \subset \Lambda$, reell und nicht negativ sind, aber monoton mit dem Volumen fallen. Hieraus folgt die Existenz eines translationsinvarianten Thermodynamischen Limes. Dies entspricht dem Fall $\theta = 0$. Der allgemeine Fall ergibt sich durch eine globale Eichtransformation der Randbedingungen: $\hat{A}' = \hat{A}$, $\hat{\Phi}' = e^{i\theta} \hat{\Phi}$. Für $\theta = 0$ liefern die bereits erwähnten Korrelationsungleichungen, daß $\langle e^{i(A, h)} \Phi^{q_1} \bar{\Phi}^{q_2} \rangle_{\alpha, \theta=0}$ monoton in e^2 fällt. Hieraus folgt Abwesenheit spontaner Symmetriebrechung und insbesondere $r = 0$, falls $v^2 < v_c^2(\lambda)$.

Im Fall $d \geq 3$, e^2 klein und v^2 groß betrachte man zunächst das Modell mit 'eingefrorener Länge' $|\Phi| = a$ (d.h. $\lambda = \infty$, $v^2 = a^2$ fest). Falls $e^2 < e_0^2$ und $ae > \mu_0$ für geeignete Konstanten e_0 , μ_0 , kann man die Methoden von [Balaban et al. 1984] und [Kennedy, King 1986] verallgemeinern und einen Zustand $\langle \cdot \rangle_{\alpha}^{|\Phi|=a}$ auf der eichinvarianten Observablenalgebra in diesem Modell konstruieren. In Abhängigkeit von a und e läßt sich dieser Zustand auch auf gewisse eichabhängige Funktionen der Felder erweitern. Für e_0 klein genug und μ_0 groß genug gilt insbesondere

$$\langle \Phi(x) \rangle_{\alpha=0}^{|\Phi|=a} > 0$$

Mit Hilfe zweier weiterer Korrelationsungleichungen zeigt man

$$\langle \Phi(x) \rangle_{\alpha, \theta=0} \geq \langle \Phi(x) \rangle_{\alpha}^{|\Phi|=a} \quad (2.13)$$

falls $v^2 > 4a^2 + d/\lambda$. Wegen der oben erwähnten Monotonie in e^2 folgt die Behauptung schließlich für alle $e^2 < e_0^2$ und $v^2 > v_0^2(\lambda)$ mit $v_0^2(\lambda) = 4\mu_c^2/e_c^2 + d/\lambda$.

Den Beweis von $\langle \Phi(x) \rangle_{\alpha=0}^{|\Phi|=a} > 0$ werde ich hier nur ganz grob skizzieren, da ich sonst im wesentlichen die Arbeit von Kennedy und King abschreiben müßte. Die notwendigen Argumente sind auch bereits in [Borgs, Nill 1986 b] aufgeführt. Ich werde also in der Hauptsache im ersten Schritt die darüber hinausgehenden Aussagen zur Translationsinvarianz für allgemeine λ zeigen, im zweiten Schritt die Ungleichung (2.13) beweisen und im 3. Schritt den Zustand $\langle \cdot \rangle_{\alpha}^{|\Phi|=a}$ explizit konstruieren. Letzteres ist auch als Vorbereitung für den nächsten Abschnitt gedacht, wo gezeigt wird, daß das Modell mit eingefrorener Länge in diesem Zustand in der Higgs-Phase ist ([Balaban et al. 1984] hatten die Existenz einer Higgsphase nur für kleine λ gezeigt).

1. Schritt: Konstruktion von $\langle \cdot \rangle_\alpha = \langle \cdot \rangle_{\alpha, \theta=0}$

Zur Definition monoton im Volumen abfallender Erwartungswerte gehe ich folgendermaßen vor. Setze mit der Notation von Satz 2.2

$$E_{\Lambda, \alpha}(\cdot | \hat{R}) := E_{\Lambda, \alpha}(\cdot | \hat{H}=0, \hat{\Phi} = \hat{R}) \quad (2.14)$$

Hierbei ist $0 < \hat{R}_x \in \mathbb{R}$ für alle $x \in (\partial\Lambda)_0$. Definiere nun einen neuen Erwartungswert in Λ ($Z_{\Lambda, \alpha}(R)$ ist die Zustandssumme zu (2.14)):

$$\langle \cdot \rangle_{\Lambda, \alpha} := \hat{Z}_{\Lambda, \alpha}^{-1} \int D_{\partial\Lambda} \nu(\hat{R}) E_{\Lambda, \alpha}(\cdot | \hat{R}) Z_{\Lambda, \alpha}(\hat{R}) \quad (2.15)$$

Hierbei ist $D_{\partial\Lambda} \nu(\hat{R}) = \prod_{x \in (\partial\Lambda)_0} d\nu(\hat{R}_x)$ das Produkt über die vom Higgs-potential V abhängigen normierten radialen 'single-Spin'-Maße auf $\mathbb{R}_+$.

$$d\nu(R) = N^{-1} e^{-V(R) - \frac{d}{2} R^2} R dR \quad (2.16)$$

und $\hat{Z}_{\Lambda, \alpha} = \int D_{\partial\Lambda} \nu(\hat{R}) Z_{\Lambda, \alpha}(\hat{R})$ die neue Zustandssumme.

Lemma 2.8: Sei $K \subset \mathcal{A}$ endlich. Für $h \in \Omega_K^1$ und $q_i \in \Omega_K^0(\mathbb{N}_0)$ ist $\langle \exp i(A, h) \Phi^{q_1} \bar{\Phi}^{q_2} \rangle_{\Lambda, \alpha}$ für alle offenen $\Lambda \supset K$ reell, nicht negativ und monoton fallend in Λ (d.h. der Erwartungswert ist jedenfalls nicht kleiner in allen offenen Λ' mit $K \subset \Lambda' \subset \Lambda$).

Beweis:

Wir führen $\Phi = R e^{i\varphi}$ ein und schreiben $\exp i(A, h) \Phi^{q_1} \bar{\Phi}^{q_2} = R^p \exp i((A, h) + (\varphi, q))$ mit $p = q_1 + q_2$, $q = q_1 - q_2$. Nach Definition (2.14) sind die Erwartungswerte invariant unter $A \mapsto -A$, $\varphi \mapsto -\varphi$ und deshalb reell. Wir können daher stattdessen $f := R^p \cos((A, h) + (\varphi, q))$ betrachten. Als nächstes führen wir zusätzliche positive Hilfsparameter m_{xy}^2 , δ_x und κ ein und definieren

$$\begin{aligned} & \langle f \rangle_{\Lambda, \alpha, m^2, \delta, \kappa} \\ &:= \hat{Z}^{-1} \int d\mu_{\Lambda, \alpha}(\varphi) e^{-\frac{1}{2} \|m\varphi\|_1^2} D_{\Lambda} \nu(R) D_{\Lambda} \varphi e^{\sum_{x \in \Lambda_0} \delta_x \cos \varphi_x} \\ & \exp \left[\kappa \sum_{\langle xy \rangle \in \Lambda_1} R_x R_y \cos(\varphi_{xy} + d\varphi_{xy}) \right] f(\varphi, R, \varphi) \end{aligned} \quad (2.17)$$

Hierbei ist Z der zugehörige Normierungsfaktor und

$$d\mu_{\Lambda, \alpha}(H) = D_{\Lambda} H \exp \left[-\frac{1}{2\epsilon^2} (\|di_{\Lambda} H\|^2 + \frac{1}{\alpha} \|d^* i_{\Lambda} H\|^2) \right] \quad (2.18)$$

mit der natürlichen Einbettung $i_{\Lambda} : \Omega_{\Lambda} \rightarrow \Omega_{\Lambda^{\infty}}$ (vgl. 2.5 b). Unsere gesuchten Erwartungswerte (2.15) in Λ ergeben sich mit $m_{xy}^2 = \delta_x = 0$ und $K = 1$. Die entsprechenden Erwartungswerte in Λ' erhält man, indem man diese Bedingungen für m^2 und δ nur auf den Punkten und Bonds aus Λ' erfüllt und $m_{xy}^2 = \infty \quad \forall \langle x, y \rangle \in \Lambda \setminus \Lambda'$ sowie $\delta_x = \infty \quad \forall x \in \Lambda_0 \setminus \Lambda'_0$ setzt^(*). Wir brauchen also nur noch zu zeigen, daß die Erwartungswerte (2.17) monoton in m_{xy}^2 , δ_x und K wachsen. Die behauptete Monotonie in Λ folgt damit sofort, und die Nicht-Negativität, indem wir $K = 0$ setzen. Dann nämlich faktorisieren die A-, R- und φ -Integrale und jedes für sich ist trivialerweise nicht negativ.

Die Monotonie in m_{xy}^2 , δ_x und K folgt durch differenzieren nach diesen Parametern aus folgender Korrelationsungleichung

$$\langle R^{\varphi} \cos((H, h) + (\varphi, q)) ; R^{\varphi'} \cos((H, h') + (\varphi, q')) \rangle_{\Lambda, \alpha, m^2, \delta, K} \geq 0 \quad (2.19)$$

Der Beweis von (2.19) geht genauso wie in [Brydges, Fröhlich, Seiler 1979 a]. Für die Monotonie in m_{xy}^2 setze man $-\frac{1}{2} A_{xy}^2 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^{-2} (\cos(\epsilon A_{xy}) - 1)$. ■

Monotonie im Volumen garantiert die Existenz eines thermodynamischen Limes, der von der speziellen Folge $\Lambda \uparrow \Lambda^{\infty}$ nicht abhängt. Insbesondere können wir also auch eine translatierte Folge^(**) wählen und erhalten somit Translationsinvarianz des Zustands

$$\langle \cdot \rangle_{\alpha}^{\theta=0} := \lim_{\Lambda \uparrow \Lambda^{\infty}} \langle \cdot \rangle_{\Lambda, \alpha}$$

Für $\alpha = 0$ ergibt sich insbesondere der gewünschte Zustand in Landau-Eichung.

(*) Dies erzwingt $A = 0$ und $\varphi = 0$ auf $\Lambda \setminus \Lambda'$ und die verbleibenden R-Integrale auf $\Lambda \setminus \Lambda'$ sind daher entkoppelt.

(**) Selbstverständlich nur für die Λ , die groß genug sind, so daß der Träger K auch im translatierten Λ enthalten ist.

Bemerkung:

Die Wahl (2.15) ist essentiell für diesen Beweis, da sich sonst der Erwartungswert in kleineren Volumen nicht als entsprechender Grenzwert $m_{xy}^2 \rightarrow \infty$ und $\delta_x \rightarrow \infty$ schreiben läßt. Insbesondere dürfen die R-Integrale auf $\partial\Lambda$ nicht gekoppelt sein und als Eichfixierung ist $\|d^*i_\Lambda H\|_\Lambda^2$ anstatt $\|d_\Lambda^* H\|_\Lambda^2$ zu verwenden.

2. Schritt: Untere und obere Schranken

Mit Hilfe von (2.19) sehen wir sofort, daß $\langle \exp i(A, h) \Phi^{q_1} \bar{\Phi}^{q_2} \rangle$ auch monoton in e^{-2} wächst (setze $-\frac{1}{2}(dH)^2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-2} [\langle \exp(\varepsilon dH) \rangle - 1]$ etc.). Für $e^2 = 0$ entkoppelt das A-Integral (man reskaliere $A \rightarrow e A$), und man erhält den Erwartungswert von $\Phi^{q_1} \bar{\Phi}^{q_2}$ im reinen Φ^4 -Spinmodell. Hieraus folgt Abwesenheit von spontaner Symmetriebrechung für alle $\alpha \geq 0$, falls $v^2 < v_c^2(\lambda)$, dem kritischen Wert im Spinmodell. Um eine untere Schranke zu erhalten, definieren wir neue Erwartungswerte mit anderen Randbedingungen. Setze mit der Notation von Satz 2.1

$$E_{\Lambda, \alpha}^{\partial\Lambda}(\cdot | \hat{R}) := E_{\Lambda, \alpha}^{\partial\Lambda}(\cdot | \hat{H}=0, \hat{\Phi} = \hat{R})$$

$$\langle \cdot \rangle_{\Lambda, \alpha}^{\partial\Lambda} := Z_{\Lambda, \alpha}^{\partial\Lambda}{}^{-1} \int D_{\partial\Lambda} \nu(\hat{R}) E_{\Lambda, \alpha}^{\partial\Lambda}(\cdot | \hat{R}) Z_{\Lambda, \alpha}^{\partial\Lambda}(\hat{R}) \quad (2.20)$$

mit dem gleichen $d\nu$ wie in (2.16) und $Z_{\Lambda, \alpha}^{\partial\Lambda} = \int D_{\partial\Lambda} \nu(\hat{R}) Z_{\Lambda, \alpha}^{\partial\Lambda}(\hat{R})$.

Lemma 2.9:

$$\langle e^{i(A, h)} \Phi^{q_1} \bar{\Phi}^{q_2} \rangle_{\Lambda, \alpha} \geq \langle e^{i(A, h)} \Phi^{q_1} \bar{\Phi}^{q_2} \rangle \geq 0$$

Beweis:

Die neuen Erwartungswerte ergeben sich mit $m_{xy}^2 = \delta_x = 0$ und $\mathcal{K} = 1$ wie in (2.17), nur daß $d\mu_{\Lambda, \alpha}(A)$ zu ersetzen ist durch

$$d\mu_{\Lambda, \alpha}^0(A) = D_\Lambda A e^{-\frac{1}{2}e^2(\|d_\Lambda H\|_\Lambda^2 + \frac{1}{\alpha}\|d_\Lambda^* H\|_\Lambda^2)} \quad (2.21)$$

Insbesondere sind sie also auch reell und wegen der analogen Monotonie-eigenschaften in m_{xy}^2 , δ_x und $\mathcal{K}$ nicht negativ.

Weiter ersetzen wir jetzt $d\mu_{\Lambda, \alpha}^0$ durch

$$d\mu_{\Lambda, \alpha, \alpha'} (A) := d\mu_{\Lambda, \alpha}^0 (A) \exp \left[- \frac{1}{2\alpha'} e^2 \left\| d^* i_{\Lambda} A \right\|_{\partial\Lambda}^2 \right]$$

und bezeichnen die entsprechenden Zustände in Λ mit $\langle \cdot \rangle_{\Lambda, \alpha, \alpha'}$.
Damit haben wir $\langle \cdot \rangle_{\Lambda, \alpha}^{\partial\Lambda} = \langle \cdot \rangle_{\Lambda, \alpha, \alpha'=\infty}$ und wegen $d\mu_{\Lambda, \alpha} = d\mu_{\Lambda, \alpha, \alpha'=\alpha}$ folgt $\langle \cdot \rangle_{\Lambda, \alpha} = \langle \cdot \rangle_{\Lambda, \alpha, \alpha'=\alpha}$. Lemma 2.9 folgt aus der Tatsache, daß die betrachteten Erwartungswerte im Zustand $\langle \cdot \rangle_{\Lambda, \alpha, \alpha'}$ aus analogen Gründen wie zuvor in e^{-2} nun auch in $(\alpha')^{-1}$ monoton wachsen. $\square$

Als nächstes definieren wir $\langle \cdot \rangle_{\Lambda, \alpha}^{|\phi|=\alpha}$ als den Limes $\lambda \rightarrow \infty$, $v^2 = a^2$ fest, von $\langle \cdot \rangle_{\Lambda, \alpha}^{\partial\Lambda}$. Aus Appendix A von [Kennedy, King 1986] folgt:

Lemma 2.10: Sei $v^2 \geq 4a^2 + d/2$. Dann gilt:

$$\langle e^{i(\pi, h)} \phi^{q_1} \bar{\phi}^{q_2} \rangle_{\Lambda, \alpha}^{\partial\Lambda} \geq \langle e^{i(\pi, h)} \phi^{q_1} \bar{\phi}^{q_2} \rangle_{\Lambda, \alpha}^{|\phi|=\alpha}$$

Hiermit folgt also (2.13) und damit der 2. Teil von Theorem 2.7 für $v^2 > 4a^2 + d/2$, falls gezeigt ist, daß der thermodynamische Limes

$$\langle \phi(x) \rangle_{\alpha=0}^{|\phi|=\alpha} := \lim_{\lambda \uparrow \lambda^\infty} \langle \phi(x) \rangle_{\Lambda, \alpha=0}^{|\phi|=\alpha} > 0$$

existiert.

Bemerkung:

Die Zustände $\langle \cdot \rangle_{\Lambda, \alpha}^{\partial\Lambda}$ sind analytisch leichter zu handhaben als $\langle \cdot \rangle_{\Lambda, \alpha}$, da für sie die explizite Eichkovarianz im Sinne von Satz 2.1 gilt. Die Existenz eines thermodynamischen Limes und die Translationsinvarianz folgen jedoch nicht so einfach, da durch die Verwendung von $d\mu_{\Lambda, \alpha}^0$ (2.21) statt $d\mu_{\Lambda, \alpha}$ (2.18) die Monotonie im Volumen nicht mehr garantiert ist. Man könnte jedoch sicherlich die Clusterentwicklung von [Balaban et al. 1984] zur Konstruktion eines translationsinvarianten thermodynamischen Limes mit diesen Randbedingungen verwenden.

3. Schritt: Konstruktion von $\langle \cdot \rangle$

Im Limes $\lambda \rightarrow \infty$, $v^2 = a^2$ fest, führt bereits die gegenüber [Balaban et al. 1984] einfachere Polymerentwicklung von Kennedy und King zum Ziel. Ich beschränke mich zunächst auf die lokale eichinvariante Observablenalgebra und formuliere daher den folgenden Satz für beliebige Eichfixierungen.

Satz 2.11: Es gibt nur von $d \geq 2$ abhängige positive Konstanten e_0, μ_0 , so daß für $0 < e < e_0$ und $ae > \mu_0$ ein translationsinvarianter Gibbs-Zustand $\langle \cdot \rangle_{|\Phi|=a}$ auf der lokalen eichinvarianten Observablenalgebra konstruiert werden kann. Erwartungswerte in diesem Zustand sind analytisch in e^{-2} im Gebiet $Re(e^{-2}) > e_0^{-2}, |e^{-2}| > \mu_0^2/a^2$.

Bemerkung:

Im nächsten Abschnitt werde ich zeigen, daß das System in den Zuständen $\langle \cdot \rangle_{|\Phi|=a}$ in der Higgsphase ist.

Beweis:

Da der radiale Freiheitsgrad eingefroren ist, gilt $\Phi = a e^{i\varphi}$, und es genügt, Erwartungswerte von $\exp i((A,h) + (\varphi,q))$ zu betrachten. Eichinvarianz bedingt $d^*h = q$ und daher $(A,h) + (\varphi,q) = (A + d\varphi, h)$. Erwartungswerte von $\exp i(A + d\varphi, h)$ für $h \in \Omega'_\lambda$ mit $d^*h \in \Omega^0_\lambda(\mathbb{Z})$ können wir mit Hilfe der Transformation von [Balaban et al. 1984] umformen. Wir zerlegen das A-Feld in einen beschränkten plus einen diskreten Anteil

$$A = A^c + 2\pi n_1$$

mit $A^c(b) \in [-\pi, \pi)$ und $n_1(b) \in \mathbb{Z} \quad \forall b \in \Lambda_1$. Hiermit erhalten wir

$$\langle e^{i(\pi + d_\lambda \varphi, h)} \rangle_{|\Phi|=a} = Z_\lambda(h) / Z_\lambda(0) \quad (2.22)$$

mit

$$Z_\lambda(h) = \int D_\lambda^c A \, D_\lambda^c \varphi \sum_{n_1 \in \Omega'_\lambda(\mathbb{Z})} e^{-\frac{1}{2e^2} \|d_\lambda A + 2\pi d_\lambda n_1\|_\lambda^2} e^{S_{gf}(A + 2\pi n_1)} e^{a^2 \sum_{b \in \Lambda_1} \cos((\pi + d_\lambda \varphi)_b) i(\pi + d_\lambda \varphi + 2\pi n_1, h)_\lambda}$$

$D_\Lambda^c A$ und $D_\Lambda^c \varphi$ sind die entsprechenden Produkte über Punkte bzw. Bonds von (auf 2π normierten) Haarmaßen auf $U(1)$. Wir verwenden von jetzt ab zur Konstruktion des thermodynamischen Limes für Λ nur noch offene rechteckige Kästen, so daß die (erweiterte ^{*}) Kohomologie trivial ist. Dann läßt sich die Summe über $n_1 \in \Omega_\Lambda^1(\mathbb{Z})$ bezüglich der Zerlegung

$$n_1 = n_1(n_2) - d_\Lambda n_0$$

als Doppelsumme über geschlossene $n_2 \in \Omega_\Lambda^2(\mathbb{Z})$, (d.h. $d_\Lambda n_2 = 0$) und $n_0 \in \Omega_\Lambda^0(\mathbb{Z})$ schreiben, wobei $n_1(n_2) \in \Omega_\Lambda^1(\mathbb{Z})$ eine spezielle Lösung von $d_\Lambda n_1(n_2) = n_2$ ist. Da $d_\Lambda^* h$ ganzzahlig ist, gilt $\exp 2\pi i (d_\Lambda n_0, h) = 1$ und folglich

$$Z_\Lambda(h) = \int D_\Lambda^c A D_\Lambda^c \varphi \sum_{d_\Lambda n_2 = 0} e^{-\frac{1}{2\epsilon^2} \|d_\Lambda A + 2\pi n_2\|^2} \frac{\alpha^2}{e} \sum_{b \in \Lambda_1} \cos (A + d_\Lambda \varphi)_b \\ e^{i(A + d_\Lambda \varphi + 2\pi n_1(n_2), h)_\Lambda} \sum_{n_0} e^{S_{g.f.}(A + 2\pi n_1(n_2) - 2\pi d_\Lambda n_0)}$$

Wenn wir die Summationen ausführen, ist der verbleibende Integrand explizit periodisch in A , d.h. eine Funktion von e^{iA} . Wir dürfen daher die $U(1)$ -Eichtransformation $e^{iA} \rightarrow e^{i(A + d\varphi)} = e^{iA'}$ durchführen und erhalten:

$$Z_\Lambda(h) = \int D_\Lambda^c A \sum_{d_\Lambda n_2 = 0} e^{-\frac{1}{2\epsilon^2} \|d_\Lambda A + 2\pi n_2\|^2} \frac{\alpha^2}{e} \sum_{b \in \Lambda_1} \cos A_b \\ e^{i(A + 2\pi n_1(n_2), h)_\Lambda} \int D_\Lambda^c \varphi \sum_{n_0} e^{S_{g.f.}(A + 2\pi n_1(n_2) - d_\Lambda(\varphi + 2\pi n_0))}$$

Nun schreiben wir $\psi = \varphi + 2\pi n_0$ und fassen das kompakte φ -Integral mit der Summe über n_0 zu einem nichtkompakten ψ -Integral zusammen. Dies ergibt

$$\int D_\Lambda \psi e^{S_{g.f.}(A + 2\pi n_1(n_2) - d_\Lambda \psi)} = 1$$

aufgrund der allgemeinen Forderung (1.7) an Eichfixierungsfunktionen. Wir erhalten schließlich

(*) 'augmented cohomology' [Hocking, Young 1961] : d -Formen α_d heißen geschlossen, wenn $\sum_c d(c) = 0$.

$$Z_\Lambda(h) = \int_{D_\Lambda^c A} \sum_{d_\Lambda n_2 = 0} e^{-\frac{1}{2\epsilon^2} \|dA + 2\pi n_2\|_\Lambda^2 + a^2 \sum_{b \in \Lambda_1} \cos H_b + i(H, h)_\Lambda + 2\pi i(n_2, f_2(h))_\Lambda} \quad (2.23)$$

Hierbei ist $f_2(h) \in \Omega_\Lambda^2(Z)$ eine 2-Form^(*), so daß $(d_\Lambda^* f_2(h) - h) \in \Omega_\Lambda^1(Z)$ und deswegen

$$e^{2\pi i(n_1, n_2), h)_\Lambda} = e^{2\pi i(n_1, n_2), d_\Lambda^* f_2)_\Lambda} = e^{2\pi i(n_2, f_2)_\Lambda}$$

Zur Herleitung einer Polymerentwicklung für $Z(h)$ verfahren wir ähnlich wie [Kennedy, King 1986], d.h. wir entwickeln um $n_2 = 0$ und um das normierte Produktmaß

$$D_\Lambda W(H) := \prod_{b \in \Lambda_1} dW(H_b) \\ dW(H_b) := N^{-1} e^{a^2 \cos H_b} dH_b$$

Hierzu definieren wir $S_p(A, n_2)$ für Plaketten $p \in \Lambda_2$ gemäß

$$1 + S_p = \exp \left[-\frac{1}{2\epsilon^2} ((dA)_p^2 + 4\pi n_2(p)(dA)_p) \right]$$

Damit folgt (nach einer Umnormierung $D^c A \exp(a^2 \sum_b \cos H_b) \rightarrow D_\Lambda W$)

$$Z_\Lambda(h) = \sum_{Y \subset \Lambda_2} \sum_{d_\Lambda n_2 = 0} k_\Lambda(n_2, Y, h) \quad (2.24)$$

mit

$$k_\Lambda(n_2, Y, h) := e^{-\frac{2\pi^2}{\epsilon^2} \|n_2\|_\Lambda^2 + 2\pi i(n_2, f_2(h))_\Lambda} \int_{D_\Lambda W(H)} e^{i(H, h)_\Lambda} S_{(H, n_2)}^Y$$

und

$$S^Y := \prod_{p \in Y} S_p \quad (:= 1, \text{ falls } Y = \emptyset)$$

Nun fassen wir die Menge Y mit dem Träger von n_2 zu einem neuen Satz $\Gamma := Y \cup \text{supp } n_2$ von Plaketten zusammen. Die nicht-leeren zusammen-

(*) Daß $f_2(h)$ existiert, folgt aus $d_\Lambda^* h \in \Omega_\Lambda^0(Z)$ wegen der trivialen Homologie. Sei $\tilde{h} \in \Omega_\Lambda^1(Z)$ mit $d_\Lambda^* \tilde{h} + d_\Lambda^* h = 0 \Rightarrow \exists f_2 \in \Omega_\Lambda^2(\mathbb{R})$: $d_\Lambda^* f_2 = \tilde{h} + h$.

hängenden Teilmengen $\delta \subset \Gamma$ nennen wir gewöhnliche Polymere in Γ . Hierbei heißen 2 Plaketten zusammenhängend, falls sie eine gemeinsame Seite haben oder gegenüberliegende Seiten eines gemeinsamen Würfels sind. Als nächstes benötigen wir den Begriff der h-Polymere. Sei $K(h) = \bigcup_{i=0}^d K_i(h) \subset \Lambda^\infty$ der kleinste abgeschlossene (aufgefaßt als Unterzellkomplex von Λ^∞) rechteckige Kasten, der den Träger von h enthält. Eine Teilmenge $\delta \subset \Gamma$ heißt h-Polymer in Γ , wenn δ entweder leer oder Vereinigung von gewöhnlichen Polymeren in Γ ist, von denen jedes mit $K_2(h)$ zusammenhängt^(*). Jede Menge Γ von Plaketten läßt sich hiermit eindeutig zerlegen in ein maximales h-Polymer $\Gamma_h \subset \Gamma$ und einen Satz gewöhnlicher Polymere $\delta_i \subset \Gamma \setminus \Gamma_h$, so daß die δ_i gerade die Zusammenhangskomponenten von $\Gamma \setminus \Gamma_h$ sind:

$$\Gamma = \Gamma_h \cup \bigcup_i \delta_i \quad (2.25)$$

Nun beachte man folgende Fakten:

1. Da Γ_h maximales h-Polymer in Γ ist, hängen die δ_i mit $K_2(h)$ nicht zusammen.
2. Der obige Zusammenhangsbegriff für Mengen von Plaketten garantiert, daß jede 2-Form n_2 eindeutig als Summe $n_2 = \sum_i n_2^{(i)}$ geschrieben werden kann, wobei $\text{supp } n_2^{(i)}$ gerade die Zusammenhangskomponenten von $\text{supp } n_2$ sind und $d_\Lambda n_2 = 0 \iff \forall i : d_\Lambda n_2^{(i)} = 0$ gilt.
3. Sei Λ von vornherein so groß, daß $K(h) \subset \Lambda$ gilt. Dann können wir $f_2(h)$ immer mit $\text{supp } f_2(h) \subset K_2(h)$ wählen. In der Tat ist $K \equiv K(h) \subset \Lambda$ auch als Unterkomplex von Λ abgeschlossen, d.h. mit der Einbettung $i_K : \Omega_K \rightarrow \Omega_\Lambda$ gilt $i_K d_K^* = d_\Lambda^* i_K$. Wenn wir h als 1-Form $h \in \Omega_K^1$ auffassen, folgt $d_K^* h \in \Omega_K^2(\mathbb{Z})$. Da die (erweiterte) Homologie von K ebenfalls trivial ist, gibt es ein $\tilde{h} \in \Omega_K^1(\mathbb{Z})$ mit $d_K^* h + d_K^* \tilde{h} = 0$ und demzufolge ein $f_2(h) \in \Omega_K^2(\mathbb{R})$ mit $d_K^* f_2 = h + \tilde{h}$, also $d_\Lambda^* (i_K f_2) = i_K h + i_K \tilde{h}$.

Aus 1. - 3. und der Zerlegung (2.25) folgt:

$$\sum_{\gamma \subset \Gamma} \sum_{d_\Lambda n_2 = 0} b_\Lambda(n_2, \gamma, h) = z_\Lambda(\Gamma_h, h) \prod_{i=1}^r z_\Lambda(\delta_i, 0)$$

$\gamma \cup \text{supp } n_2 = \Gamma$

(*) Manche Polymere können sowohl gewöhnliche wie auch h-Polymere sein.

Hierbei sind die 'Aktivitäten' $z_\lambda(\gamma, h)$ gegeben durch

$$z_\lambda(\gamma, h) = \sum_{\gamma \subset \delta} \sum_{\substack{d_h n_2 = 0 \\ \gamma \cup \text{supp } n_2 = \delta}} k_\lambda(n_2, \gamma, h) \quad (2.26)$$

Damit läßt sich die Summe (2.24) schließlich umschreiben zu

$$Z_\lambda(h) = \sum_{\Gamma \subset \Lambda_2} z_\lambda(\Gamma_h, h) \prod_{\gamma \subset \Gamma \setminus \Gamma_h}^c z(\gamma, 0) \quad (2.27a)$$

wobei das Produkt $\prod^c$ über die Zusammenhangskomponenten γ von $\Gamma \setminus \Gamma_h$ geht. Für $h = 0$ gilt $\Gamma_h = \emptyset$, und wir erhalten analog

$$Z_\lambda(0) = 1 + \sum_{\substack{\Gamma \subset \Lambda_2 \\ \Gamma \neq \emptyset}} \prod_{\gamma \subset \Gamma}^c z_\lambda(\gamma, 0). \quad (2.27b)$$

Um zu den Erwartungswerten (2.22) zu kommen, benützen wir den üblichen Trick

$$Z_\lambda(h) / Z_\lambda(0) = \frac{d}{ds} [\ln (Z_\lambda(0) + s Z_\lambda(h))] \Big|_{s=0} \quad (2.28)$$

Wir müssen also die Gleichungen (2.27) für eine Entwicklung von $Z_\lambda(0) + s Z_\lambda(h)$ zusammenfassen. Dies ist eine Standardprozedur, die z.B. in [Borgs 1986] nachgelesen werden kann. Man erhält

$$Z_\lambda(0) + s Z_\lambda(h) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\{\tilde{\gamma}_1, \dots, \tilde{\gamma}_n\} \subset \mathcal{P}_h(\Lambda^\infty)}^c \prod_{i=1}^n s^{\nu(\tilde{\gamma}_i)} \tilde{z}_\lambda(\tilde{\gamma}_i, h) \quad (2.29)$$

Die Menge der Polymere $\mathcal{P}_h(\Lambda^\infty)$ im unendlichen Volumen Λ^∞ ist jetzt genaugenommen eine Menge von 2-Tupeln $\tilde{\gamma} = (\tilde{\gamma}, \nu)$ wobei $\tilde{\gamma} \subset \Lambda_2^\infty$ die eigentliche Menge von Plaketten bezeichnet. Es ist $\nu \equiv \nu(\tilde{\gamma}) = 0$ für gewöhnliche und $\nu(\tilde{\gamma}) = 1$ für h-Polymere. Die Fälle, in denen $\tilde{\gamma}$ sowohl als gewöhnliches wie auch als h-Polymer aufgefaßt werden kann, werden durch entsprechende Zuordnungen von $\nu(\tilde{\gamma})$ als zwei verschiedene Polymere unterschieden. Die Summe $\sum^c$ ist über alle kompatiblen Teilmengen von $\mathcal{P}_h(\Lambda^\infty)$, wobei Polymere $\tilde{\gamma}$ kompatibel heißen, falls ihre Erweiterungen $\tilde{\gamma} := \tilde{\gamma} \cup K_2(\nu(\tilde{\gamma}), h)$ paarweise nicht zusammenhängen^(*). Die Aktivitäten $\tilde{z}_\lambda(\tilde{\gamma}, h)$ ergeben sich schließlich aus (2.26) durch

(*) Insbesondere sind also 2 h-Polymere immer inkompatibel.

$$\tilde{z}_\Lambda(\delta, h) = \begin{cases} z_\Lambda(\tilde{\delta}, \nu(\delta)h) & , \quad \tilde{\delta} \subset \Lambda \\ 0 & , \quad \tilde{\delta} \not\subset \Lambda \end{cases}$$

In (2.29) haben wir nun $Z_\Lambda(0) + s Z_\Lambda(h)$ als Zustandssumme eines Polymer-
systems dargestellt. Vermittels der Mayerentwicklung für Polymersysteme
erhalten wir die Standardformel für den Logarithmus (für einen Überblick
über die zu verwendenden Techniken siehe z.B. [Seiler 1982, Brydges 1984,
Borgs 1986]).

$$\log(Z_\Lambda(0) + s Z_\Lambda(h)) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{\delta_1, \dots, \delta_n \in \mathcal{P}(\Lambda^\infty) \\ \nu(\delta_i)=1}} \frac{\phi_c(\delta_1, \dots, \delta_n)}{n!} \prod_{i=1}^n s^{\nu(\delta_i)} \tilde{z}_\Lambda(\delta_i, h) \quad (2.30)$$

Differenzieren nach s an der Stelle $s = 0$ gemäß (2.28) liefert

$$Z_\Lambda(h)/Z_\Lambda(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\substack{\delta_i \in \mathcal{P}(\Lambda^\infty) \\ \nu(\delta_i)=1}} \sum_{\delta_1, \dots, \delta_n \in \mathcal{P}(\Lambda^\infty)} \frac{\phi_c(\delta_1, \dots, \delta_n)}{n!} \prod_{i=1}^n \tilde{z}_\Lambda(\delta_i, h) \quad (2.31)$$

Hierbei ist $\phi_c(\delta_1, \dots, \delta_n)$ ein kombinatorischer Faktor, der invariant
unter Permutationen ist und immer verschwindet, wenn die Vereinigung
 $\bigcup_{i=1}^n \delta_i$ nicht zusammenhängend ist. $\mathcal{P}(\Lambda^\infty)$ ist die Menge der gewöhnlichen
Polymere. Die Clusterentwicklung (2.31) ist zunächst nur eine Identität
im Sinne formaler Potenzreihen in den Aktivitäten $\tilde{z}_\Lambda$. Falls jedoch

$$|\tilde{z}_\Lambda(\delta, h)| \leq e^{-M|\delta|} \quad (2.32a)$$

wobei $|\delta|$ die Anzahl der Plaketten in $\tilde{\delta}$ und M unabhängig von Λ , δ und h
ist, so gibt es eine nur von der Raumzeitdimension d abhängige Konstante
 $M_0 > 0$, so daß für $M > M_0$ (2.31) absolut und gleichmäßig in Λ für jedes
 h mit beschränktem Träger konvergiert. In der Tat gilt dann (siehe z.B.
Satz C3 in [Borgs 1986])

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\substack{\delta_i \in \mathcal{P}(\Lambda^\infty) \\ \nu(\delta_i)=1}} \sum_{\delta_1, \dots, \delta_n \in \mathcal{P}(\Lambda^\infty)} |\phi_c(\delta_1, \dots, \delta_n)| \prod_{i=1}^n |\tilde{z}_\Lambda(\delta_i, h)| \\ & \leq \text{const.} \cdot e^{\tau |k_2(h)|} \end{aligned} \quad (2.32b)$$

wobei const. eine von h unabhängige, monoton fallende Funktion von $M - M_0$ ist, $|K_2(h)|$ die Anzahl der Plaketten in $K_2(h)$ bezeichnet und $\tau = 1 + \frac{1}{2} \ln 2$. Hiermit können wir den thermodynamischen Limes $\bigwedge \uparrow \bigwedge^\infty$ termweise durchführen. Die Reihe (2.31) ist dann klarerweise translationsinvariant und die Analytizität in e^2 folgt in jedem Gebiet $G \ni e^2$, in dem die Abschätzungen (2.32a) uniform gelten, aus der entsprechenden Analytizität der $Z_\Lambda(\tau, h)$. Satz 2.11 folgt hiermit aus folgendem, im Anhang C bewiesenen Lemma.

Lemma 2.12: Zu jedem $M > 0$ gibt es $e_0 > 0$, $\mu_0 < \infty$, so daß unabhängig von Λ und h

$$|\tilde{Z}_\Lambda(\tau, h)| \leq e^{-M|\tau|}$$

für alle $e^2 \in \mathbb{C}$ mit $\text{Re}(e^2) > e_0^2$ und $a^2 |e^2| > \mu_0^2$.

Bemerkung:

Man könnte Lemma 2.12 wahrscheinlich auch auf ein Gebiet von komplexen a^2 ausdehnen und somit Analytizität in a^2 beweisen. Wegen des zusätzlichen technischen Aufwands habe ich das hier unterlassen.

Will man den Zustand $\langle \cdot \rangle_{|\phi|=\alpha}$ in einer speziellen Eichung auf eichabhängige Funktionen der Felder ausdehnen, so muß man die eingangs gestellte Bedingung $d^* h = q$ fallenlassen. In Landau-Eichung kann man sich aber wegen $d^* A = 0$ dennoch wieder auf eichinvariante Observable zurückziehen:

$$d_\Lambda^* H = 0 \implies (H, h)_\Lambda + (\varphi, q)_\Lambda = (H + d_\Lambda \varphi, j_\Lambda)$$

mit

$$j_\Lambda = d_\Lambda^* \Delta_\Lambda^{-1} d_\Lambda h + d_\Lambda \Delta_\Lambda^{-1} q$$

Zwar gilt auch jetzt $d_\Lambda^* j_\Lambda = q \in \Omega_\Lambda^0(Z)$, aber das Problem ist, daß der Träger von j_Λ für generische h und q typischerweise immer ganz Λ_1 ist. Dies gilt insbesondere, wenn wir den Erwartungswert von $\Phi(x)$, d.h. $h = 0$ und $q = \delta_x$ betrachten. Die Clusterentwicklung (2.31) gilt zwar in jedem endlichen Volumen auch noch, wenn wir h durch j_Λ ersetzen, aber der thermodynamische Limes läßt sich jetzt nicht mehr durchführen. Ausgehend von (2.23) verfahren Kennedy und King daher etwas anders und definieren zusätzlich zu $\mathcal{G}_p$ noch

$$1 + \sigma_b(\pi, j_\Lambda) : = e^{i \pi(b) j_\Lambda(b)}$$

für Bonds $b \in \Lambda_1$. Man vermeidet nun die Einführung von h-Polymeren, geht aber ansonsten analog vor und erhält

$$Z_\Lambda(j_\Lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\{\delta_1, \dots, \delta_n\} \subset \Gamma(\Lambda^\infty)} \prod_{i=1}^n \xi_\Lambda(\delta_i, j_\Lambda) \quad (2.33)$$

Polymere $\delta \in \Gamma(\Lambda^\infty)$ sind jetzt nicht-leere zusammenhängende Mengen von Bonds und Plaketten, $\delta = \delta^1 \cup \delta^2 \subset \Lambda_1^\infty \cup \Lambda_2^\infty$. Hierbei heißt δ zusammenhängend, wenn entweder $\delta^2 = \emptyset$ und $\delta^1 = \{b\}$ nur aus einem Bond besteht oder $\delta^2 \neq \emptyset$ zusammenhängend ist und $\delta^1 \subset \partial(\delta^2)$, d.h. jeder Bond aus δ^1 zum Rand einer Plakette aus δ^2 gehört. Die Summe $\sum^c$ ist wieder über Teilmengen bestehend aus paarweise nicht zusammenhängenden δ 's und die Aktivitäten im Volumen Λ sind ähnlich wie in (2.26) gegeben durch Null, falls $\delta \not\subset \Lambda$, und durch

$$\xi_\Lambda(\delta, j_\Lambda) = \sum_{Y \subset \delta^2} \sum_{\substack{\chi \in \mathcal{Y} \\ \chi \supset \delta^1}} k_\Lambda(\delta^1, Y, n_2, j_\Lambda)$$

falls $\delta \subset \Lambda$. Hierbei ist

$$k_\Lambda(\delta^1, Y, n_2, j_\Lambda) = \exp\left[-\frac{2\pi^2}{\epsilon^2} \|n_2\|_\Lambda^2 + 2\pi i (n_2, f_\epsilon(j_\Lambda))\right] \int D_\Lambda W(\pi) e^{i \delta^1 Y}$$

Aus (2.33) erhalten wir wieder die Mayerentwicklung für den Logarithmus

$$\log(Z_\Lambda(j_\Lambda)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\{\delta_1, \dots, \delta_n\}} \Phi_c(\delta_1, \dots, \delta_n) \prod_{i=1}^n \xi_\Lambda(\delta_i, j_\Lambda) \quad (2.34)$$

Lemma 2.12 und damit die Konvergenz von (2.34) gelten analog für die Aktivitäten $\xi_\Lambda(\delta_i, j_\Lambda)$ mit dem Unterschied, daß nun die Schranken e_0^2 und μ_0 von $\|j_\Lambda\|_\infty$ abhängen. In der Tat lassen sich wegen $|\sigma_b| \leq 2$ die Aktivitäten der Polymere δ mit $\delta^2 \neq \emptyset$ wie zuvor unabhängig von j_Λ abschätzen, jedoch gilt für die nur aus einem Bond $b \in \Lambda_1$, bestehenden Polymere lediglich

$$\begin{aligned} |\xi_\Lambda(\{b\}, j_\Lambda) &\leq \int dW(\pi) |e^{i \pi(b) j_\Lambda(b)} - 1| \\ &\leq |j_\Lambda(b)| e^{-c a^2} \end{aligned}$$

Da jedoch in $d \geq 3$ Dimensionen für jedes feste h und q mit beschränktem Träger die l^2 -Norm und damit auch die l^1 -Norm von $j_\Lambda(h, q)$ unabhängig von Λ beschränkt bleibt, erhält man schließlich:

Satz 2.13: In $d \geq 3$ gibt es zu jedem $h \in C^1(\mathbb{R})$, $q \in C^0(\mathbb{Z})$ mit beschränktem Träger positive Konstanten e_0, μ_0 , so daß für $\operatorname{Re} e^{-2} > e_0^{-2}$ und $a^2 |e^2| > \mu_0^2$ der thermodynamische Limes

$$\langle e^{i(\pi, h)} e^{i(\varphi, q)} \rangle_{\alpha}^{|h|=a} = \lim_{\Lambda} \langle e^{i(\pi, h)} e^{i(\varphi, q)} \rangle_{\Lambda, \alpha}^{|h|=a}$$

existiert, translationsinvariant und analytisch in e^2 ist.

Bemerkung:

Die Verallgemeinerung auf allgemeine α -Eichungen folgt hier sofort mit der Faktorisierungsformel von Satz 2.1.

Beweisskizze:

Aufbauend auf den Methoden zum Beweis von Lemma 2.12 muß man die Entwicklung für den Logarithmus des Erwartungswerts $\ln [Z_\Lambda(j_\Lambda) / Z_\Lambda(0)]$ absolut und gleichmäßig in Λ abschätzen [Kennedy, King 1986]. Hierzu definiert man eine interpolierende Funktion $H_\Lambda(s)$ mit $H'_\Lambda(0) = 0$ und $H_\Lambda(s) = \ln(Z_\Lambda(s j_\Lambda))$, falls $s \in \mathbb{Z}$. Dies liefert

$$\ln Z_\Lambda(j_\Lambda) - \ln Z_\Lambda(0) = \int_0^1 (1-s) H''_\Lambda(s) ds$$

und es genügt, die Entwicklung für $H''_\Lambda(s)$ entsprechend abzuschätzen. Zur Definition der Aktivitäten $\xi_\Lambda(\delta, sj_\Lambda)$ für allgemeine $s \in \mathbb{R}$ schreibt man für jedes feste δ die von $f_2(sj_\Lambda)$ abhängigen Terme folgendermaßen um^(*):

$$e^{2\pi i(n_2, f_2(sj_\Lambda))_\Lambda} = e^{2\pi i(n_1, n_2, sj_\Lambda)_{O(\delta)}} \quad (2-35a)$$

Hierbei ist $O(\delta) \subset \Lambda$ der kleinste offene rechteckige Kasten, der alle Plaketten aus δ enthält. Da $\operatorname{supp} n_2 \subset \delta$ und $d_\Lambda n_2 = 0$ folgt $d_{O(\delta)} n_2 = 0$.

(*) Man beachte, daß $f_2(sj_\Lambda)$ i.A. nur für $s \in \mathbb{Z}$ existiert.

Wir können daher $n_1, (n_2) \in \Omega_{O(\delta)}^1(\mathbb{Z})$ finden, so daß $d_{O(\delta)} n_1, (n_2) = n_2$.
Für $s \in \mathbb{Z}$ folgt

$$\begin{aligned} (n_2, f_2(s j_\Lambda))_\Lambda &= (d_{O(\delta)} n_1, (n_2), i_{O(\delta)}^* f_2(s j_\Lambda))_{O(\delta)} \\ &= (n_1, (n_2), d_{O(\delta)}^* i_{O(\delta)}^* f_2(s j_\Lambda))_{O(\delta)} \quad (2.35b) \\ &= (n_1, (n_2), s j_\Lambda)_{O(\delta)} \end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichung gilt, weil $O(\delta)$ offen ist und daher $i_{O(\delta)}^* d_\Lambda^* = d_{O(\delta)}^* i_{O(\delta)}^*$. $i_{O(\delta)} : \Omega_{O(\delta)} \rightarrow \Omega_\Lambda$ ist wieder die natürliche Einbettung. (2.35) ist aber nun für beliebige $s \in \mathbb{R}$ wohldefiniert. Durch Wahl eines maximalen Eichbaums in $O(\delta)$ überzeugt man sich, daß $n_1(-n_2) = -n_1, (n_2)$ und $\|n_1, (n_2)\|_\infty \leq c \|n_2\|_{O(\delta)}^2$ gewählt werden kann, wobei c nur von der Dimension d abhängt. Hieraus folgt die Konvergenz der Entwicklung für $H_\Lambda^n(s)$, die man durch entsprechendes Differenzieren von (2.34) erhält, falls $\text{Re}(e)$ klein genug und $a^2 e^2$ groß genug ist. Wegen $H_\Lambda(s) = H_\Lambda(-s)$ gilt $H_\Lambda'(0) = 0$ und damit die Behauptung. ▀

Aus Kennedy's und King's Analyse ergibt sich für $|s| \leq 1$ insbesondere die Abschätzung

$$|H_\Lambda''(s)| \leq \|j_\Lambda\|^2 \text{const.}$$

wobei die Konstante unabhängig von Λ und s für e^2 klein genug und $a e$ groß genug beliebig klein gemacht werden kann. Mit Hilfe der Monotonie von $Z_\Lambda(j_\Lambda) / Z_\Lambda(0)$ in e^{-2} erhält man schließlich das folgende Ergebnis, das ich für den Fall $j_\Lambda = d_\Lambda \cdot \Delta_\Lambda^{-1} q$, $q := \delta_x$, zitiere:

Korollar 2.14: [Kennedy, King 1986; Borgs, Nill 1986 b] . In $d \geq 3$ gibt es zu jedem $0 < r < 1$ positive Schranken $e(r)$ und $a(r)$, so daß für $0 \leq e < e(r)$ und $a > a(r)$

$$\left\langle e^{i p(x)} \right\rangle_{\Lambda, \alpha=0}^{|\phi|=a} \geq r$$

unabhängig vom Volumen Λ .

Hiermit ist die spontane Symmetriebrechung für das Modell mit eingefrorener Länge $|\phi| = a$ gezeigt. Mit Lemma 2.10 folgt sie dann auch für allgemeine λ , falls $v^2 > 4a^2 + d/\lambda$. Dies beendet den Beweis von Theorem 2.7.

2.3. Die Phasenstruktur des nicht-kompakten Modells

In diesem Abschnitt werde ich eine relativ vollständige Übersicht über die Phasenstruktur des nicht-kompakten Modells geben. Die bisherigen Resultate zur Higgsphase für kleine e^2 und λ [Balaban et al. 1984] und zur Coulombphase für kleine v^2 [Brydges, Seiler 1986] werden hierbei ergänzt durch den Nachweis einer Coulombphase für große e^2 (λ und v^2 beliebig) und einer Higgsphase für kleine e^2 und große a^2 im Modell mit eingefrorener Länge ($\lambda = \infty$, $v^2 = a^2$ fest). In Theorem 2.7 wurde bereits gezeigt, daß zumindest in Teilgebieten der Higgsphase spontane Symmetriebrechung in Landau-Eichung vorliegt, während dies in dem Bereich der Coulombphase mit kleinen v^2 nicht der Fall ist. Dies werde ich nunmehr ergänzen durch den Nachweis, daß auch für den Bereich der Coulombphase mit großen e^2 die globale Symmetrie zumindest in den Zuständen $\langle \cdot \rangle_{\lambda, \alpha}^{21}$ (2.20) im thermodynamischen Limes nicht gebrochen ist. Da dies jedoch nach Lemma 2.10 in der Higgsphase der Fall ist, scheint sich hiermit im Erwartungswert von Φ tatsächlich ein Ordnungsparameter für den Coulomb-Higgs-Phasenübergang zu ergeben.

Vorweg möchte ich noch erwähnen, daß einige der in diesem Abschnitt vorgestellten Ideen ohne detaillierte Beweise bereits in [Brydges, Fröhlich, Seiler 1979 b] skizziert sind. Da jene Arbeit in dieser Hinsicht unvollständig ist, scheint es mir dennoch angebracht, die noch fehlenden Beweise hier explizit vorzuführen.

Ich will mich nun zunächst der Higgsphase zuwenden und als erstes aus der Literatur das folgende Theorem zitieren:

Theorem 2.15: [Balaban, Brydges, Imbrie, Jaffe 1984]: Zu jedem $\mu_0 > 0$, $\epsilon_0 > 0$ gibt es in $d \geq 2$ eine Konstante $\lambda_0 > 0$, so daß für eichinvariante, in den Eichfeldern A periodische, lokale Observable f , g im Parameterbereich

$$\{(\lambda, v, e) \mid \lambda < \lambda_0, \lambda v^2 = \epsilon_0, e^2 v^2 = \mu_0\}$$

erstens der thermodynamische Limes

$$\langle f \rangle := \lim_{\lambda \uparrow \infty} \langle f \rangle_{\lambda, \alpha}^{21}$$

existiert, und zweitens (mit einer von f und g abhängigen Konstanten $C(f,g)$) gilt:

$$|\langle f \cdot T_x g \rangle - \langle f \rangle \langle T_x g \rangle| \leq C(f,g) e^{-m|x|}$$

wobei $T_x g$ die um $x \in \mathbb{Z}^d$ verschobene Observable g ist und $m > 0$ nur von λ, v, e und d abhängt.

Bemerkungen:

- i) Die Autoren merken an, daß das Theorem auch für allgemeinere eichinvariante Observable gelte. Eine Idee, wie man hierfür vorzugehen hätte, läßt sich vielleicht auch aus dem Beweis des nächsten Theorems entnehmen.
- ii) Balaban et al. konstruieren den thermodynamischen Limes über abgeschlossene Komplexe. Da als wesentliche Voraussetzung für deren Clusterentwicklung nur die Darstellbarkeit unnormierter Erwartungswerte in einer zu (2.23) analogen Form dient, gilt das Theorem für beliebige (beschränkte) Randbedingungen, solange die Eichfixierungen im endlichen Volumen als damit verträglich gewählt werden. Dies ist insbesondere für $\langle \cdot \rangle_{\lambda, \alpha}^{\partial \Lambda}$ (2.20) der Fall.
- iii) Der Beweis von Theorem 2.15 beruht auf einer Entwicklung um die semiklassische, Gauß'sche Approximation. In dieser Approximation ist $\mu = ev$ die Photonmasse und $\sqrt{2\epsilon} = \sqrt{2\lambda v^2}$ die Higgsmasse (vgl. 1.14). Es ist daher zu erwarten, daß bei festem $\lambda < \lambda_0(\epsilon_0, \mu_0)$ die Clusterentwicklung für $v^2 > v_0^2 = \epsilon_0/\lambda$ (d.h. $\epsilon > \epsilon_0$) eher noch besser konvergiert. Für größere v^2 sollte sich dann aber auch der erlaubte Spielraum für e^2 auf einen Intervall $\mu_0^2 / v_0^2 \geq e^2 \geq \mu_0^2 / v^2$ nach unten ausdehnen. Da jedoch eine in diesem Sinne nötige Abschätzung von Balaban et al. nicht durchgeführt wurde, sei das Folgende hier lediglich als Vermutung formuliert.

Vermutung 2.16: Theorem 2.15 gilt mit $v_0^2 = \epsilon_0 / \lambda$ im Parameterbereich $\{(\lambda, v, e) / \lambda \leq \lambda_0, v^2 > v_0^2, \mu_0^2 / v_0^2 \geq e^2 \geq \mu_0^2 / v^2\}$

- iv) Allgemein ist sogar zu vermuten, daß in diesem Modell die Higgsphase für $0 < e^2 \leq e_0^2$ vorliegt, falls sie für e_0^2 vorliegt (siehe auch Theorem 2.27). Da jedoch für $e^2 \rightarrow 0$ die Photonmasse zu klein wird, darf man hier keine konvergente Entwicklung mehr erwarten (möglicherweise ist der Übergang $e^2 \rightarrow 0$ zur reinen ϕ^4 -Theorie auch gar nicht analytisch).

Hiermit ist zumindest für kleine λ die Existenz einer Higgsphase gezeigt. Dies will im folgenden durch eine entsprechende Aussage für den Limes $\lambda \rightarrow \infty$, $v^2 = a^2$ fest, d.h. das Modell mit eingefrorener Länge $|\phi| = a$, ergänzen.

Theorem 2.17: Theorem 2.15 gilt auch für den in Satz 2.11 für und $a^2 |e^2| > \mu_0^2$ konstruierten Zustand $\langle \cdot \rangle_{|\phi|=a}$, und zwar allgemeiner sogar für alle polynomial in A beschränkten, eichinvarianten lokalen Observablen.

Beweis:

Dies ist eine Standard folgerung aus der Existenz einer konvergenten Clusterentwicklung. Ich zeige die Behauptung zunächst für Observable der Form $e^{i(A+d\varphi, h)}$, wobei $\text{supp } h$ beschränkt und d^*h ganzzahlig ist.

Trunkierte Erwartungswerte lassen sich ähnlich wie in (2.22) schreiben:

$$\begin{aligned} & \langle e^{i(A+d\varphi, h)} \rangle_{|\phi|=a} ; \langle e^{i(A+d\varphi, j)} \rangle_{|\phi|=a} \\ &= Z_\Lambda(h+j)/Z_\Lambda(0) - Z_\Lambda(h) Z_\Lambda(j)/Z_\Lambda(0)^2 \\ &= \frac{d^2}{ds dt} [\ln(Z_\Lambda(0) + s Z_\Lambda(h) + t Z_\Lambda(j) + st Z_\Lambda(h+j))]_{s=t=0} \end{aligned} \quad (2.36)$$

Über die analogen Argumentationsschritte, die zu (2.29/30) führten, läßt sich die Clusterentwicklung für den Logarithmus herleiten:

$$\begin{aligned} & \ln [Z_\Lambda(0) + s Z_\Lambda(h) + t Z_\Lambda(j) + st Z_\Lambda(h+j)] \\ &= \ln \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\{\delta_1, \dots, \delta_n\} \in P_{h,j}(\Lambda^\infty)} \prod_{i=1}^n \frac{1}{n!} \alpha(\delta_i) t^{\mu(\delta_i)} \tilde{z}_\Lambda(\delta_i, h, j) \right] \end{aligned} \quad (2.37a)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\delta_1, \dots, \delta_n \in P_{h,j}(\Lambda^\infty)} \phi_c(\delta_1, \dots, \delta_n) \prod_{i=1}^n \frac{1}{n!} \alpha(\delta_i) t^{\mu(\delta_i)} \tilde{z}_\Lambda(\delta_i, h, j) \quad (2.37b)$$

Polymere $\delta \in P_{h,j}(\Lambda^\infty)$ sind jetzt jedoch 3-Tupel $\delta = (\tilde{\delta}, \nu, \mu)$, wobei wieder $\tilde{\delta}$ die eigentliche Menge von Plaketten bezeichnet und $\nu = \mu = 0$ für gewöhnliche Polymere, $\nu = 1, \mu = 0$ für h-Polymere, $\nu = 0, \mu = 1$ für j-Polymere und $\nu = \mu = 1$ für (h, j)-Polymere gilt. Als (h, j)-Polymere sind hierbei alle nicht-leeren Mengen $\tilde{\delta}$ von Plaketten zuzulassen, für die das erweiterte Polymer $\bar{\delta} := \tilde{\delta} \cup K_2(\nu(\tilde{\delta})h, \mu(\tilde{\delta})j)$ zusammenhängend ist, wobei^(*)

$$K(h, j) : = \begin{cases} K(h + j), & \text{falls } K_2(h) \text{ mit } K_2(j) \text{ zusammenhängt} \\ K(h) \cup K(j) & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Aktivitäten $\tilde{z}_\lambda$ sind mit

$$\tilde{z}_\lambda(\delta, h, j) = \begin{cases} z_\lambda(\tilde{\delta}, \nu(\tilde{\delta})h + \mu(\tilde{\delta})j) & , \quad \tilde{\delta} \subset \Lambda \\ 0 & , \quad \tilde{\delta} \not\subset \Lambda \end{cases}$$

wieder durch (2.26) gegeben. Zur Herleitung von (2.37a) beachte man, daß in der zu (2.27a) analogen Entwicklung von $Z_\lambda(h + j)$ jedes $\Gamma \subset \Lambda_2$ entweder genau ein maximales (h, j)-Polymer oder genau ein maximales h- und ein maximales j-Polymer enthält (NB: h- und j-Polymere dürfen auch leer sein). Polymere δ heißen wieder kompatibel, falls ihre Erweiterungen $\bar{\delta}$ paarweise nicht zusammenhängen, die Summe $\sum'$ ist über alle kompatiblen Teilmengen von $P_{h,j}(\Lambda^\infty)$ und demzufolge $\phi_c(\delta_1, \dots, \delta_n) = 0$ immer dann, wenn $\bar{\delta}_1 \cup \dots \cup \bar{\delta}_n$ nicht zusammenhängt. Differenzieren gemäß (2.36) liefert schließlich

$$\begin{aligned} & \left\langle e^{i(\pi, d\varphi, h)} ; e^{i(\pi, d\varphi, j)} \right\rangle_{\Lambda} | \phi | = \alpha \\ & = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\delta_1, \dots, \delta_n}' \phi_c(\delta_1, \dots, \delta_n) \prod_{i=1}^n \tilde{z}_\lambda(\delta_i, h, j) \end{aligned} \quad (2.38)$$

wobei die Summe $\sum'$ nur noch über n-Tupel $(\delta_1, \dots, \delta_n) \in (P_{h,j}(\Lambda^\infty))^n$ geht, die entweder genau ein h- und ein j-Polymer oder genau ein (h, j)-Polymer, ansonsten aber nur gewöhnliche Polymere enthalten. Da $\phi_c(\delta_1, \dots, \delta_n)$

(*) In jedem Fall ist die Kohomologie von $K(h, j)$ wieder trivial, und es kann $f_2(h + j)$ mit $\text{supp } f_2(h + j) \subset K_2(h, j)$ gewählt werden.

nur dann von Null verschieden ist, wenn die Vereinigung der $\overline{\delta_i}$ zusammenhängt, muß für die nicht verschwindenden Terme in der Summe (2.38) gelten

$$\sum_i |\delta_i| > d(h, j)$$

wobei $d(h, j)$ der Abstand (= Zahl der Bonds in der kürzesten Verbindungs-
linie) zwischen $K(h)$ und $K(j)$ ist. Die Konvergenz vorausgesetzt, erhalten
wir daher für beliebige $m > 0$

$$\begin{aligned} & | \langle e^{i(\pi + d\varphi, h)} ; e^{i(\pi + d\varphi, j)} \rangle | >_\lambda |\phi| = \alpha | \\ & \leq e^{-md(h, j)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\delta_1, \dots, \delta_n} |\phi(\delta_1, \dots, \delta_n)| \prod_{i=1}^n e^{m|\delta_i|} |\tilde{z}_\lambda(\delta_i, h, j)| \end{aligned} \quad (2.39)$$

Die Summe auf der rechten Seite von (2.39) ist analog wie in (2.32b) ab-
solut und gleichmäßig in λ konvergent und beschränkt durch

$$\text{const. exp}(\tau |K_2(h, j)|)$$

falls

$$e^{m|\delta|} |\tilde{z}_\lambda(\delta, h, j)| \leq e^{-M|\delta|}$$

Nun gilt in jedem Fall

$$d(h, T_x j) \geq |x| - d(h, j) - |K_2(h, j)|$$

Die Behauptung folgt daher mit Hilfe von Lemma (2.12) und der Wahl

$$C(h, j) = \text{const. } e^{m(d(h, j) + K_2(h, j)) + \tau K_2(h, j)}$$

Für allgemeinere polynomial beschränkte Observable müssen die im Anschluß
an Gleichung (2.25) aufgeführten Argumente 1. und 3. durch folgende Überle-
gungen ersetzt werden:

Da f periodisch in und eichinvariant ist, gilt mit den Bezeichnungen
in der Herleitung von (2.22/23)

$$\begin{aligned} f(\pi, \varphi) &= f(\pi' + 2\pi n_1(n_2) + 2\pi d n_0, \varphi) \\ &= f(\pi' + 2\pi n_1(n_2), \varphi - 2\pi n_0) \\ &= f(\pi' + d\varphi + 2\pi n_1(n_2), 0) \end{aligned}$$

(2.22/23) gilt damit analog für $\langle f \rangle_{\Lambda}^{|\phi|=\alpha}$, wenn wir in (2.23) $e^{i(A,h)}$ durch $e^{2\pi i(n_2, f_2(h))}$ ersetzen durch

$$f_0(A, n_2) := f(A + 2\pi n_1(n_2), 0) \quad (2.40)$$

f_0 ist in der Tat von der speziellen Wahl $n_1(n_2)$ unabhängig, da eine andere Wahl sich nur um eine ganzzahlige Eichtransformation unterscheiden und damit $f(A + 2\pi n_1(n_2), \varphi = 0)$ wegen der Periodizität in φ invariant lassen würde. Es gilt sogar allgemein

$$f_0(A + 2\pi n_1, n_2) = f_0(A, n_2 + d_{\Lambda} n_1) \quad (2.41)$$

für alle $n_2 \in d_{\Lambda}^{-1}(\Omega_{\Lambda}^1(\mathbb{Z}))$.

Zur Definition von f -Polymeren verwende man nun $K(f) \subset \Lambda^{\infty}$ als den kleinsten abgeschlossenen rechteckigen Kasten, der den Träger von $f(\cdot, \varphi = 0)$, (d.h. die Menge aller Bonds b mit $(\partial f / \partial A_b)_{\varphi=0} \neq 0$) enthält. Das folgende Lemma soll zeigen, daß f_0 (2.40) tatsächlich nur von den Variablen in $K(f)$ abhängt.

Lemma 2.18: Seien $n_2, m_2 \in \Omega_{\Lambda}^2(\mathbb{Z})$, die auf $K_2(f)$ übereinstimmen, und sei $d_{\Lambda} n_2 = d_{\Lambda} m_2 = 0$, dann gilt

$$f_0(A, n_2) = f_0(A, m_2)$$

Beweis:

Sei wie zuvor $i_K : \Omega_K \rightarrow \Omega_{\Lambda}$ die kanonische Einbettung, $K \equiv K(f)$. Es gilt $0 = i_K^*(m_2 - n_2) = i_K^* d_{\Lambda} n_1(m_2 - n_2) = d_K i_K^* n_1(m_2 - n_2)$, da K abgeschlossen. Wähle also $n_0 \in \Omega_K^1(\mathbb{Z})$ mit $d_K n_0 = i_K^* n_1(m_2 - n_2)$. Damit gilt:

$$\begin{aligned} f_0(A, n_2) &= f_0(A + 2\pi d_{\Lambda} i_K n_0, n_2) \\ &= f_0(A + 2\pi i_K i_K^* d_{\Lambda} i_K n_0, n_2) \\ &= f_0(A + 2\pi i_K d_K n_0, n_2) \\ &= f_0(A + 2\pi i_K i_K^* n_1(m_2 - n_2), n_2) \\ &= f_0(A + 2\pi n_1(m_2 - n_2), n_2) \\ &= f_0(A, n_2 + d_{\Lambda} n_1(m_2 - n_2)) \\ &= f_0(A, m_2) \end{aligned}$$

Hierbei folgt die 1. und 6. Gleichung wegen (2.41), die 2. und 5., da der Träger von $f_0(\cdot, n_2)$ in K liegt und $i_K^* i_K$ die Projektion auf $i_K(\Omega_K) \subset \Omega_\Lambda$ ist, die 3. wegen $d_K = i_K^* d_\Lambda i_K$ und die 4. nach der Definition von n_0 . $\square$

Falls also jetzt mit

$$k_\Lambda(n_2, Y, f) := e^{-\frac{2\pi^2}{e^2} \|n_2\|_\Lambda^2} \int D_\Lambda W(\pi) f_0(\pi, n_2) s^Y$$

die Menge Y u $\text{supp } n_2 = \delta_1 \cup \delta_2$ in zwei nicht zusammenhängende Polymere $\delta_{1/2}$ zerfällt, wobei δ_1 mit $K(f)$ zusammenhängt, δ_2 dagegen nicht, so folgt

$$k_\Lambda(n_2, Y, f) = k_\Lambda(n_2^{(1)}, Y_1, f) k_\Lambda(n_2^{(2)}, Y_2, 0)$$

wobei $\delta_i = Y_i \cup \text{supp } n_2^{(i)}$, $Y = Y_1 \cup Y_2$ und $n_2 = n_2^{(1)} + n_2^{(2)}$. Der Grund ist, daß wir nach Lemma 2.18 $f_0(A, n_2)$ durch $f_0(A, n_2^{(1)})$ ersetzen dürfen.

Hiermit geht die Polymerentwicklung für allgemeine Observable f durch wie im Beweis von Satz (2.11) mit Aktivitäten $z_\Lambda(\delta, f)$, die wie in (2.26) gegeben sind.

Theorem (2.17) folgt daher aus folgender, im Anhang C bewiesenen Verallgemeinerung von Lemma (2.12):

Lemma 2.19: Sei die lokale eichinvariante Observable f polynomial beschränkt. Zu jedem $M > 0$ gibt es $e_0^2 > 0$, $\mu_0 < \infty$, so daß unabhängig von $\Lambda \supset \text{supp } f$

$$|z_\Lambda(\delta, f)| \leq N(f) e^{-M|\delta|}$$

für alle $e^2 \in \mathbb{C}$ mit $\text{Re}(e^{-2}) \gg e_0^{-2}$ und $a^2 |e^2| > \mu_0^2$. Hierbei ist $N(\cdot)$ eine translationsinvariante Norm mit $N(1) = 1$ und $N(fg) \leq N(f) N(g)$. $\square$

Aus Theorem (2.17) folgt insbesondere, daß in der Higgsphase die Zweipunktfunktion $\langle dA(p) dA(p') \rangle_{|\phi|=a}$ exponentiell abfällt, d.h. das Photon massiv ist. Falls v^2 klein genug ist, ist dies nicht mehr der Fall, und das System befindet sich daher in der Coulombphase, wie Brydges und Seiler gezeigt haben:

Theorem 2.20 [Brydges, Seiler 1986]: Zu jedem $0 < \lambda < \infty$ gibt es in $d \geq 3$ $\beta_1(\lambda)$ so daß unabhängig von e^2 die Zweipunktfunktion von dA für $v^2 < \beta_1(\lambda)$ nicht exponentiell abfällt.

Der Beweis von Brydges und Seiler basiert auf einem Kriterium von [Fröhlich, Spencer 1982]. Sie zeigen für beliebige Testfunktionen $F \in \Omega_\Lambda^2$

$$e^2(d_\Lambda^* F, \Delta_\Lambda^{-1} d_\Lambda^* F) \geq \langle (d_\Lambda F, F)_\Lambda \rangle_{\Lambda, \alpha}^{2\lambda} \geq \tilde{e}^2(d_\Lambda^* F, \Delta_\Lambda^{-1} d_\Lambda^* F)_\Lambda \quad (2.42)$$

wobei $0 < \tilde{e}^2 < e^2$, falls $v^2 < \beta_1(\lambda)$. Hieraus folgt in $d \geq 3$, daß das Abfallverhalten der Zweipunktfunktion von dA nicht summierbar ist (die Fouriertransformierte ist bei Impuls $k = 0$ unstetig) und damit die Behauptung. Physikalisch bedeutet (2.42), daß die Wechselwirkung von äußeren elektrischen Strömen $j = d^* F$ Coulomb-artig bleibt. Das gleiche Kriterium läßt sich auch unabhängig von λ und v^2 zeigen, falls e^2 groß genug ist:

Theorem 2.21: In $d \geq 3$ gibt es eine nur von d abhängige Konstante $e_1^2 > 0$, so daß (2.42) unabhängig von λ und v^2 für alle $e^2 > e_1^2$ gültig ist^(*).

Beweis:

(2.42) folgt aus der allgemeineren Ungleichung

$$e^{\frac{1}{2}} (d_\Lambda^* F, \Delta_\Lambda^{-1} d_\Lambda^* F) \geq \langle e^{(d_\Lambda F, F)} \rangle_{\Lambda, \kappa} \geq e^{\frac{1}{2}} (d_\Lambda^* F, \Delta_\Lambda^{-1} d_\Lambda^* F)_\Lambda \quad (2.43)$$

durch skalieren $F \rightarrow sF$ und zweimaliges Differenzieren bei $s = 0$ (die Terme erster Ordnung in s verschwinden). Die obere Schranke in (2.43) folgt, wenn wir in der Wirkung (2.17) $\mathcal{K} = 0$ setzen. Mit Hilfe einer Korrelationsungleichung ähnlich wie in (2.19) [Brydges, Fröhlich, Seiler 1979a] vergrößert sich hiermit der Erwartungswert von $e^{(dA, F)}$ (**). Die A - und ϕ -Integrale sind jedoch jetzt entkoppelt, und das Gauß'sche A -Integral liefert sofort die obere Schranke.

Die Beweisidee zum Nachweis der unteren Schranke in (2.43) sei vorweg kurz zusammengefaßt: Nach einer Korrelationsungleichung erhalten wir einen verallgemeinerten 't Hooft-Loop in einem reinen Z -Eichmodell (siehe 2.46). In $d = 4$ taucht dieser Ausdruck nach einer Dualitätstransformation auch im Guth'schen Deconfinementbeweis für die reine $U(1)$ -Eichtheorie mit Villain-Polyakov-Wirkung auf. Ausgehend von diesem Ausdruck läßt sich die Guth'sche Beweistechnik jedoch auf beliebige Dimension $d \geq 2$ verallgemeinern und liefert somit die gewünschte untere Schranke.

Wir addieren nun zunächst den folgenden Ausdruck zur Wirkung

$$a^2 \sum_{b \in \Lambda_1} \cos(\tilde{A} + d\varphi)_b \quad (2.44a)$$

Mit Hilfe der gleichen Korrelationsungleichungen wie zuvor fällt der Erwartungswert von $e^{(dA, F)}$ monoton in a^2 und daher

(*) Für $d = 4$ wurde dies in [Borgs, Nill 1986c] gezeigt.

(**) Die Korrelationsungleichungen gelten unabhängig von der konkreten Wahl (z.B. (2.18) oder (2.21)) für das Gauß'sche Maß in den Eichfeldern.

$$\langle e^{(d_1 \mathbb{F}, \mathbb{F})_\Lambda} \rangle_{\Lambda, \alpha, \alpha^2=0}^{2\Lambda} \geq \langle e^{(d_1 \mathbb{F}, \mathbb{F})_\Lambda} \rangle_{\Lambda, \alpha, \alpha^2=\infty}^{2\Lambda} \quad (2.44b)$$

Im Limes $\alpha^2 \rightarrow \infty$ ist das Eichfeld A modulo 2π auf eine reine Eichung $d\mathbb{F}$ eingefroren und die R-Integrale daher wieder entkoppelt. Mit Hilfe der Transformation von [Balaban et al. 1984] erhält man somit eine reine Z-Eichtheorie (siehe auch [Peskin 1978, Brydges, Fröhlich, Seiler 1979b]). Der Erwartungswert ergibt sich (mit den offensichtlichen Änderungen) aus (2.23) für $\alpha^2 = \infty$:

$$\begin{aligned} \langle e^{(d_1 \mathbb{F}, \mathbb{F})_\Lambda} \rangle_{\Lambda, \alpha, \alpha^2=\infty}^{2\Lambda} &= Z_\Lambda^{-1} \sum_{d_\Lambda n_2=0} e^{(2\pi n_2, \mathbb{F})_\Lambda - \frac{4\pi^2}{2e^2} \|n_2\|_\Lambda^2} \\ &= e^{\frac{e^2}{2} (d_\Lambda^* \mathbb{F}, \Delta_\Lambda^{-1} d_\Lambda^* \mathbb{F})} W_{\Lambda, e^2} (e^2 d_\Lambda \Delta_\Lambda^{-1} d_\Lambda^* \mathbb{F}) \end{aligned} \quad (2.45)$$

mit

$$W_{\Lambda, e^2} (\mathbb{F}) := Z_\Lambda^{-1} \sum_{d_\Lambda n_2=0} e^{-\frac{1}{2e^2} \|\mathbb{F} + 2\pi n_2\|_\Lambda^2} \quad (2.46)$$

Z_Λ ist die entsprechende Summe mit $\mathbb{F} = 0$. Zur Herleitung von (2.45/46) haben wir $(n_2, \mathbb{F})_\Lambda = (n_2, d_\Lambda \Delta_\Lambda^{-1} d_\Lambda^* \mathbb{F})$ benützt (da $d_\Lambda n_2 = 0$ und $\mathbb{1} = d_\Lambda \Delta_\Lambda^{-1} d_\Lambda^* + \mathbb{1}_\Lambda^* \Delta_\Lambda^{-1} d_\Lambda$) und quadratisch ergänzt. Die Funktion $W_{\Lambda, e^2} (\mathbb{F})$ ist für den Fall, daß die Plakettenvariable $\mathbb{F}$ nur Werte aus $2\pi\mathbb{Z}$ annimmt, wohlbekannt. Sie geht durch eine Dualitätstransformation in $d = 4$ über in den Erwartungswert eines verallgemeinerten Wilson-Loops im reinen $U(1)$ -Eichmodell mit Villain-Polyakov-Wirkung (1.25b) und $\beta = e^2 / 4\pi^2$ [Banks, Myerson, Kogut 1977; Savit 1977], und in $d = 3$ in eine n -Punktfunktion im reinen $U(1)$ -Spinmodell (XY-Modell) mit Villain-Wirkung. Für spätere Zwecke will ich das hier zusammenfassen:

Lemma 2.22: Sei Λ^* der zu Λ duale Komplex (s. Anhang A), $f \in \Omega_{\Lambda^*}^2(\mathbb{Z})$, $j \in \Omega_{\Lambda^*}^1(\mathbb{Z})$ und $\beta = e^2 / 4\pi^2$. Dann gilt

i) in $d = 4$:

$$W_{\Lambda, e^2} (2\pi f^*) = Z_{\Lambda^*}^{-1} \int_{\Lambda^*} D_{\Lambda^*} \mathbb{F} e^{i(d_{\Lambda^*} \mathbb{F}, f)} \sum_{n_2 \in \Omega_{\Lambda^*}^2(\mathbb{Z})} e^{-\frac{\beta}{2} \|d_{\Lambda^*} \mathbb{F} + 2\pi n_2\|_{\Lambda^*}^2}$$

ii) in $d = 3$:

$$W_{\Lambda, e^2}(2\pi j^*) = Z_{\Lambda^*}^{-1} \int D_{\Lambda^*} \varphi e^{i(d_{\Lambda^*} \varphi, j)} \sum_{n_1 \in \Omega_{\Lambda^*}^1(\mathbb{Z})} e^{-\frac{\beta}{2} \|d_{\Lambda^*} \varphi + 2\pi n_1\|_{\Lambda^*}^2}$$

Hierbei ist $e^{iA} \in \Omega_{\Lambda^*}^1(U(1))$, $e^{i\varphi} \in \Omega_{\Lambda^*}^0(U(1))$ und $D_{\Lambda^*} A$ bzw. $D_{\Lambda^*} \varphi$ sind die entsprechenden Produkte über normierte Haarmaße auf $U(1)$.

Mit einer nicht vollkommen präzisen, aber sicherlich unmißverständlichen Notation ist Z_{Λ^*} die jeweilige Zustandssumme der betreffenden Modelle. f^* und j^* sind die jeweiligen dualen 2-Formen.

Hiermit wird nahegelegt, daß in $d = 4$ die Deconfinement-Phase in der reinen $U(1)$ -Eichtheorie [Guth 1980; Fröhlich, Spencer 1982, King 1986] der Coulomb-phase im Z -Eichmodell (2.45/46) entsprechen sollte. Falls das Modell (2.45/46) unabhängig davon, ob $F/2\pi$ ganzzahlig ist oder nicht, genau einen Phasenübergang hat, trifft dies tatsächlich zu. Um aber die konkrete untere Schranke in (2.43) zu beweisen, müssen wir noch etwas weiter gehen und den Guth'schen Satz für unsere Zwecke adaptieren. Die Formulierung der folgenden beiden Aussagen wurde für spätere Zwecke so gewählt. Die Originalversionen von Guth ergeben sich in $d = 4$ nach einer Dualitätstransformation des XY-Modells.

Lemma 2.23 [Guth 1980]: Sei $h \in \Omega_{\Lambda}^1(\mathbb{R})$ eine beliebige 1-Form. Dann gilt für alle $d \geq 2$:

$$W_{\Lambda, \beta^{-1}}(d_{\Lambda} h) \geq Z_{\Lambda, 4d\beta}^{XY}(h) / Z_{\Lambda, 4d\beta}^{XY}(0)$$

mit

$$Z_{\Lambda, \beta}^{XY}(h) := \int D_{\Lambda} \varphi \sum_{n_1 \in \Omega_{\Lambda}^1(\mathbb{Z})} e^{-\frac{\beta}{2} \|d_{\Lambda} \varphi + h + 2\pi n_1\|_{\Lambda}^2}$$

wobei $e^{i\varphi} \in \Omega_{\Lambda}^1(U(1))$ und $D_{\Lambda} \varphi$ das entsprechende Produkt über normierte Haarmaße ist.

Hiermit wird das Problem auf die einfachere Analyse des Unordnungsparameters $Z^{XY}(h) / Z^{XY}(0)$ im XY-Modell bei hoher Temperatur abgewälzt. Nach Fouriertransformation läßt sich eine Tieftemperaturentwicklung für das duale Modell durchführen und man erhält:

Satz 2.24 [Guth 1980]: Es gibt nur von $d \geq 2$ abhängige Konstanten $c > 0$, $\beta_1 > 0$, so daß für $\beta < \beta_1$ gilt

$$| \ln Z_{\Lambda, \beta}^{XY}(h) - \ln Z_{\Lambda, \beta}^{XY}(0) | \leq c e^{-\frac{1}{2\beta}} \inf_{n_2} \|d_\Lambda h + 2\pi n_2\|_\Lambda^2$$

Hiermit folgt für $e^{-2} < \beta_1 / 4d$

$$W_{\Lambda, e^2} (e^2 d_\Lambda \Delta_\Lambda^{-1} d_\Lambda^* F) \geq \exp \left[-c e^{-\frac{e^2}{8d}} e^4 \|d_\Lambda \Delta_\Lambda^{-1} d_\Lambda^* F\|_\Lambda^2 \right]$$

und damit die Behauptung (2.43) mit $\tilde{e}^2 = e^2 - 2c e^4 e^{-\frac{e^2}{8d}} > 0$, falls e^2 groß genug ist. $\blacksquare$

Bemerkung:

Die Lemmata 2.22/23 beruhen auf Dualitätstransformationen, die in der Literatur nicht immer ganz fehlerfrei bewiesen sind. Der Vollständigkeit halber habe ich deshalb im Anhang D die Beweise vorgeführt. Ebenfalls in Anhang D befinden sich ein paar Bemerkungen, die die gegenüber der Originalversion von Guth (s. auch [Seiler 1982]) etwas allgemeinere Formulierung von Lemma 2.23 und Satz 2.24 begründen.

Hiermit ist die Abwesenheit der Higgsphase für große e^2 und $d \geq 3$ gezeigt^(*): In Übereinstimmung damit will ich nun zeigen, daß für e^2 groß genug auch keine spontane Symmetriebrechung vorliegt.

Theorem 2.25 [Borgs, Nill 1986c]

$$0 \leq \langle \phi(x) \rangle_{\Lambda, \alpha}^{2\Lambda} \leq e^{\frac{1}{2\beta} (\Delta_\Lambda^{-1})_{xx}} \langle R(x) \rangle_\Lambda^{\text{rad}} \leq e^{i f(x)} \langle \chi Y \rangle_{\Lambda, \beta}$$

wobei $\langle \cdot \rangle_{\Lambda, \beta}^{XY}$ der Erwartungswert im U(1)-Spinmodell (= XY-Modell) mit Villain-Wirkung und inverser Temperatur $\beta = 4d/e^2$ ist, und $\langle \cdot \rangle_\Lambda^{\text{rad}}$ der Erwartungswert im rein radialen Modell, d.h., $A = 0$, $\varphi = 0$.

Da das XY-Modell für hohe Temperaturen bekanntlich in seiner symmetrischen Phase ist, verschwindet im thermodynamischen Limes der Erwartungswert von $e^{i\varphi(x)}$ für $e^{-2} < \beta_c^{XY} / 4d$. Da $(\Delta_\Lambda^{-1})_{xx}$ im Limes $\Lambda \rightarrow \mathbb{Z}^d$ für $d \geq 3$

(*) Für einen alternativen Beweis in $d = 3$ siehe [Fröhlich, Spencer 1982]

endlich bleibt, haben wir deshalb zumindest mit obigen Randbedingungen für $d \geq 3$ und e^2 groß genug keine spontane Symmetriebrechung. Dieses Ergebnis ist insofern zufriedenstellend, als mit den gleichen Randbedingungen die Symmetrie in der Higgsphase gebrochen wird (Lemma 2.10 und Korollar 2.14).

Beweis:

Positivität des Erwartungswerts folgt genauso wie in Lemma 2.8. Als nächstes verändern wir die Kovarianz im Gauß'schen Maß $d\mu'_{\Lambda, \alpha}$ (2.21), indem wir α gegen Null gehen lassen und $d_{\Lambda}^* d_{\Lambda}$ durch $4d \cdot \mathbb{1}$ ersetzen. Hierdurch wächst die quadratische Form in A (NB: $d_{\Lambda}^* d_{\Lambda} \leq \Delta_{\Lambda} \leq 4d \cdot \mathbb{1}$) und abermals mit Korrelationsungleichungen von [Brydges, Fröhlich Seiler 1979a] (siehe auch [Fröhlich, Park 1977]) vergrößert sich dadurch der Erwartungswert von $\Phi(x)$. Nun wenden wir wieder (2.44) an und beachten den Unterschied, daß für $\Phi(x)$ die umgekehrte Korrelationsungleichung gilt: Der Erwartungswert wächst mit $a^{(*)}$. Für $a = \infty$ entkoppeln die R-Integrale und liefern $\langle R(x) \rangle^{\text{rad}}$. Um die Zwangsbedingung $(A_{xy} + d\varphi_{xy}) \in 2\pi\mathbb{Z}$ zu implementieren, benützen wir die Fourierdarstellung der periodisierten δ -Funktion:

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} \delta(x + 2\pi m) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{inx}$$

Dies liefert

$$\langle \Phi(x) \rangle_{\Lambda, \alpha}^{2\Lambda} \leq \langle R(x) \rangle_{\Lambda}^{\text{rad}} Z_{\Lambda}(q) / Z_{\Lambda}(0)$$

mit $q(\cdot) = \delta_x(\cdot)$ und

$$Z_{\Lambda}(q) = \int D_{\Lambda} \varphi e^{-\frac{4d}{2e^2} \|A\|^2} \delta(d_{\Lambda}^* A) e^{i(\varphi, q)} \sum_{n_1 \in \mathcal{Q}'_{\Lambda}(\mathbb{Z})} e^{i(A + d_{\Lambda} \varphi, n_1)}$$

Nun führen wir das Gauß'sche A-Integral aus und erhalten (bis auf eine von q unabhängige Normierung)

$$\begin{aligned} &= \int D_{\Lambda} \varphi e^{i(\varphi, q)} \sum_{n_1} e^{i(d_{\Lambda} \varphi, n_1)} e^{-\frac{1}{2\beta} (n_1, d_{\Lambda}^* d_{\Lambda}^{-1} d_{\Lambda} n_1)} \\ &= e^{\frac{1}{2\beta} (q, d_{\Lambda}^{-1} q)} \int D_{\Lambda} \varphi e^{i(\varphi, q)} \sum_{n_1} e^{i(d\varphi, n_1)} e^{-\frac{1}{2\beta} \|n_1\|^2} \end{aligned} \quad (2.47)$$

(*) Siehe auch 2. Fußnote Seite 57

In der letzten Gleichung haben wir $d_{\Lambda}^* \Delta_{\Lambda}^{-1} d_{\Lambda} + d_{\Lambda} \Delta_{\Lambda}^{-1} d_{\Lambda}^* = \mathbb{1}$ benützt und daß das $\mathcal{V}$ -Integral nur für $d_{\Lambda}^* n_1 = -q$ nicht verschwindet. Die verbleibende Summe ist jedoch nichts anderes als die Fourier-Darstellung der Villain-Wirkung (s. Beweis zu Lemma 2.22ii). ▀

Ich will die Aussagen dieses Abschnitts in einem Phasendiagramm vereinigen. Der Einfachheit halber beschränke ich mich auf den Fall $\lambda = \infty$, $v^2 = a^2$ fest. Modulo der Vermutung 2.16 sollte das Diagramm für kleine λ qualitativ genauso aussehen.

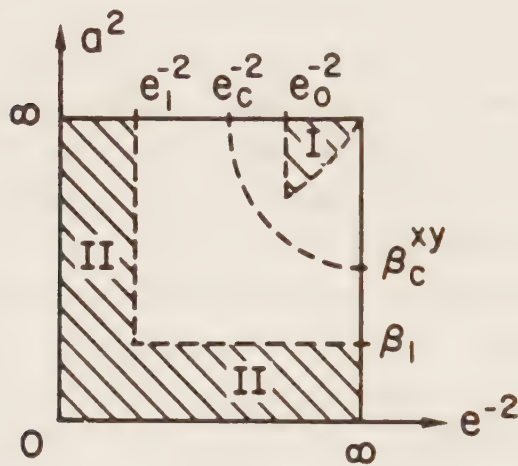


Fig 2:

Phasendiagramm für $d \geq 3$ im Modell mit eingefrorener Länge $|\phi|^2 = a^2$. Region I: Higgsphase, Region II: Coulombphase. Die tatsächliche Phasentrennlinie verläuft mutmaßlich von β_c^{xy} , der kritischen inversen Temperatur im XY-Modell, zu e_c^{-2} , dem kritischen Wert für e^{-2} in der Z-Eichtheorie. In $d = 3$ gilt $e_c^2 = 4\pi^2 \beta_{c,Villain}^{xy}$ und in $d = 4$ $e_c^2 = 4\pi^2 \beta_{c,Villain}^{u(1)}$.

2.4. Flußquantisierung und Meissner-Effekt in der Higgsphase

In diesem Abschnitt will ich die Higgsphase durch ihre magnetischen Eigenschaften charakterisieren. Der Anschaulichkeit halber beschränke ich mich für die physikalische Interpretation zunächst auf das dreidimensionale Modell und diskutiere die Verallgemeinerung auf 4 Dimensionen im Anschluß.

In drei Dimensionen ist die Wirkung des abelschen Higgsmodells auch als freies Energiefunktional für einen Supraleiter im Rahmen der Ginzburg-Landau Theory wohlbekannt (siehe z.B. [Fetter, Walecka 1971]). Hierbei wird der Supraleiter phänomenologisch durch die klassischen Feldgleichungen (Ginzburg-Landau Gleichungen) beschrieben. Das skalare Feld ist in diesem Zusammenhang als ein Bose-Kondensat von sog. Cooper-Paaren (d.h. gebundenen Elektron-Paaren mit Gesamtspin Null) zu interpretieren, so daß die Ladung von ϕ eigentlich $2e$ sein sollte. $|\phi|^2$ ist also nichts anderes als die Cooper-Paar Dichte im Supraleiter. Die semiklassische Higgsmasse, gegeben durch

$$m_H^2 = 2b = 2\lambda v^2$$

wird jetzt als inverse Kohärenzlänge aufgefaßt, d.h. als charakteristische Länge für örtliche Variationen des 'Ordnungsparameters' ϕ . Die Photonmasse

$$m_{ph} = e v$$

entspricht dagegen der inversen Eindringtiefe des magnetischen Feldes im Rahmen des gleich zu besprechenden Meissner-Effekts. Der Quotient aus Eindringtiefe und Kohärenzlänge

$$\kappa^2 = (m_H/m_{ph})^2 = 2\lambda/e^2$$

ist allgemein als 'Ginzburg-Landau Parameter' [Ginzburg, Landau 1950] bekannt.

Da genaugenommen die Ginzburg-Landau Theorie ein makroskopisches thermodynamisches Modell für einen Supraleiter liefert, ist es naheliegend, das dreidimensionale abelsche Gitter-Higgsmodell als ein zugehöriges klassisch-statistisches Modell aufzufassen (siehe z.B. [Dasgupta, Halperin 1981, Seiler 1982]), wobei die Higgsphase der supraleitenden Phase entspricht. Eindringtiefe und Kohärenzlänge sind nun thermodynamisch-statistische

Größen und der Parameter v^2 im Higgspotential liefert in etwa eine inverse Temperaturskala, was in Übereinstimmung steht mit der Tatsache, daß Supraleitung (= Higgsphase) bei tiefen Temperaturen (also großen v^2) auftritt.

Das neben der eigentlichen Supraleitfähigkeit mit Sicherheit am meisten herausragende Phänomen der supraleitenden Phase ist der sog. Meissner-Effekt [Meissner, Ochsenfeld 1933]: Wird ein Supraleiter in ein äußeres Magnetfeld eingebracht, so baut er unterhalb der Übergangstemperatur eine Gegenmagnetisierung auf, die in seinem Inneren die von außen angelegte Feldstärke genau kompensiert, falls diese einen kritischen Wert nicht übersteigt. Wird die kritische Feldstärke überschritten, so bricht in einem Typ-I Supraleiter dieser Effekt schlagartig zusammen und das System geht in seinen normalleitenden Zustand über. In einem Typ-II Supraleiter existiert dagegen noch ein intermediärer 'Vortex-Zustand', in dem der magnetische Fluß das System teilweise durchdringt. Hierbei werden die Flußlinien zu 'Vortices' mit ganzzahligem Gesamtfluß^(*) zusammengebündelt, welche sich dann wiederum gegenseitig abstoßen. Als Resultat ergibt sich eine homogene Anordnung von Vortices zu einem hexagonalen Gitter (für eine Übersicht s. [Ullmaier 1973]).

In der Ginzburg-Landau Theorie unterscheidet man zwischen Typ-I und Typ-II anhand der Lösungen der klassischen Feldgleichungen. Danach erhält man Typ-I für $\kappa < 1$ und Typ-II für $\kappa > 1$. Ob sich diese Kriterien auch auf die Gittertheorie und insbesondere dort auf das Modell mit eingefrorener Länge übertragen lassen, sei hier jedoch dahingestellt. Für eben dieses Modell werde ich in dem nun folgenden Theorem jedenfalls zeigen, daß in der Higgsphase der Erwartungswert $\langle (2\pi)^{-1} (dA)_p \rangle_{|\Phi|=\alpha}$ des magnetischen Flusses durch eine Plakette p ganzzahlig ist, falls die von außen angelegte Feldstärke von dieser ganzen Zahl um weniger als $\pm 1/4$ abweicht. Umgekehrt lassen sich die Techniken von [Brydges, Seiler 1986] zum Nachweis der Coulombphase bei schwacher Higgskoppelung verallgemeinern, um zu zeigen, daß dort $\langle (dA)_p \rangle$ näherungsweise linear von der äußeren Feldstärke abhängt, falls diese konstant auf allen zu p parallelen Plaketten gewählt wird.

(*) In geeigneten Einheiten

Im Sinne der vorherigen Beschreibung würde ich also für dieses Modell annehmen, daß in der Higgsphase der Erwartungswert des magnetischen Flusses als Funktion der von außen angelegten Feldstärke stückweise konstant ist und an den ungeradzahlig-Vielfachen von $1/2$ um eine Einheit springt, während er in der Coulombphase eine stetige (näherungsweise lineare) Abhängigkeit zeigen sollte. Anders ausgedrückt, würde ich eine kritische Feldstärke bei $1/2 \bmod \mathbb{Z}$ vermuten. Die Tatsache, daß wir hierbei die experimentellen Aussagen qualitativ nur modulo $\mathbb{Z}$ reproduzieren können, braucht uns nicht zu verwundern, da in Wirklichkeit die Cooper-Paare bei überkritischen Feldstärken auseinanderbrechen, wofür wir im Higgsmodell natürlich keine Möglichkeit haben^(*). Diskutieren läßt sich allerdings die Frage, ob die Flußquantisierung tatsächlich bis zur kritischen Feldstärke aufrecht erhalten bleibt und ob bzw. in welcher Form dort eine Phasenkoexistenz möglich ist. Man könnte z.B. spekulieren, daß dort 'Vortex-Zustände' existieren, in denen der Erwartungswert des magnetischen Flusses alternierend die Werte Null und Eins annimmt. Ich will dies hier als ein interessantes Problem der statistischen Physik für zukünftige Untersuchungen offenlassen.

Als zweites untersuche ich in diesem Abschnitt die freie Energie einer einzigen Vortex-Linie, die durch das System gezwungen wird. Wegen der bereits erwähnten Symmetrie $A \rightarrow A + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$, hängt diese Energie nur vom Abstand (und der Lage) der Ein- und Austrittspunkte ab. Ich werde zeigen, daß in der Higgsphase diese Energie linear mit dem Abstand wächst, während sie in der Coulombphase (zumindest in dem Bereich mit großen e^2) beschränkt bleibt. Erzwingt man den Ein- und Austrittspunkt durch Plazieren eines magnetischen Monopol-Antimonopol Paares, so könnte man dieses Kriterium auch etwas vage als 'Confinement äußerer Monopole' in der Higgsphase interpretieren. Ich werde an späterer Stelle noch eine kritische Bemerkung zu diesem Punkt machen.

Abschließend sei bemerkt, daß sich die Verallgemeinerung auf vier Dimensionen in natürlicher Weise ergibt, indem die nun folgenden Manipulationen und Randbedingungen gleichermaßen auf jeder Zeitschicht $t = \text{const.}$ durchgeführt werden. Anstelle einer einzigen Vortex-Linie ergibt sich dann beispielsweise eine zeitliche Folge von Vortex-Linien, deren Korand (d.h. die Menge der

(*) Auf dem Gitter hat die Kopplung an das Higgsfeld auch eine zusätzliche Symmetrie $A \rightarrow A + 2\pi n$ aufgrund der Periodizität in der kovarianten Ableitung d_A

elementaren Würfel, in denen nach der obigen Beschreibung die zugehörigen Monopole sitzen) dann einen sog. 't Hooft-loop' bildet [Wegner 1971; 't Hooft 1978/79]. Da in der vierdimensionalen euklidischen Feldtheorie zur Definition von freien Energien der Logarithmus der entsprechenden Zustandssummen noch durch die Länge in euklidischer Zeitrichtung (d.h. durch die Temperatur) dividiert werden muß, entspricht dem Kriterium für 'Confinement von Monopolen' nun die Tatsache, daß in der Higgsphase die freie Energie eines 'Vortex-Blatts' wie dessen Fläche anwächst ('Area-law'), in der Coulombphase dagegen nur proportional zum Umfang des einschließenden 't Hooft-loops ('Perimeter-law').

Ich komme nun zum Meissner-Effekt und definiere zunächst die übliche Wirkung in einem äußeren Strom $\mathcal{J}$

$$S(A, \phi; \mathcal{J}) = -\frac{1}{2e^2} \|dA\|^2 - \frac{1}{e} (A, \mathcal{J}) + S_{g.f.}(d^*A) + S_H(A, \phi) \quad (2.48a)$$

Den äußeren Strom $\mathcal{J}$ wähle ich so, daß er im Vakuum nach den Biot-Savart-Gleichungen ein homogenes Magnetfeld in z-Richtung erzeugen würde, d.h. ich lasse $\mathcal{J}$ wie in einer in z-Richtung orientierten Spule auf dem Rand von Λ um das System herumfließen.

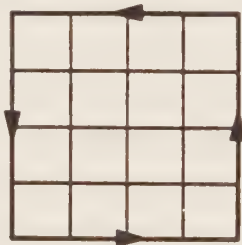


Fig. 3: Der Strom $\mathcal{J}$ in der $z = \text{const.}$ Ebene. Wir wählen $\mathcal{J}$ in jeder dieser Ebenen gleich. Das zugehörige Magnetfeld ist konstant und zeigt nach oben.

Als Randbedingung im endlichen Volumen müssen wir hierbei einen abgeschlossenen Komplex wählen^(*) (sonst wäre $\mathcal{J}$ nicht mehr in Λ enthalten). Der Feldstärketensor des von $\mathcal{J}$ erzeugten äußeren Magnetfelds genügt dann der

(*) Zusammen mit $d^*A = 0$ entspricht das der London-Eichung

Gleichung

$$F_{ext} = -e \Delta_{\Lambda}^{-1} d_{\Lambda} \int$$

und für das freie Gauß'sche elektromagnetische System (d.h. ohne Higgsfelder) erhalten wir auch sofort

$$\langle dH \rangle_{\int} = F_{ext}$$

für den Erwartungswert der dynamischen Feldstärke im äußeren Strom $\int$.

In der Coulombphase des vollen Higgsystems sollte diese Gleichung näherungsweise immer noch zutreffen, während in der Higgsphase das System nur gequantelte Flußeinheiten zu akzeptieren scheint. Um dies nun genauer zu untersuchen, ist es oft zweckmäßig, die Selbstenergie des äußeren Feldes F_{ext} in die Wirkung mit aufzunehmen (sie trägt zur Berechnung von Erwartungswerten nichts bei). Wegen der Maxwellgleichung $d^* F_{ext} = -e \int$ können wir dann auch alternativ zu (2.48a) eine Wirkung im äußeren Feld F_{ext} verwenden

$$S(H, \phi; F_{ext}) := -\frac{1}{2e^2} \|dH - F_{ext}\|^2 + S_{gf}(d^*H) + S_H(H, \phi) \quad (2.48b)$$

Für ein konstantes äußeres Magnetfeld in z-Richtung ist hierbei die 2-Form F_{ext} konstant auf allen Plaketten orthogonal zur z-Achse zu wählen. Der Fluß dieses Magnetfelds durch eine Plakette p ist dann genau durch den Wert von F_{ext} auf dieser Plakette gegeben. Im nun folgenden Theorem bezeichnet

$$\langle \cdot \rangle_{\Lambda, F_{ext}}$$

den Erwartungswert im Volumen Λ mit äußerem Feld F_{ext} . Ich formuliere die Aussage zunächst für etwas allgemeinere F_{ext} . Die Interpretation als Meissner-Effekt ergibt sich, wenn wir $F_{ext} = \text{const.}$ auf allen positiv orientierten Plaketten orthogonal zur z-Achse ^(*) wählen. Es sei noch angemerkt, daß in diesem Fall der Limes

$$\langle \cdot \rangle_{F_{ext}} := \lim_{\Lambda} \langle \cdot \rangle_{\Lambda, F_{ext}}$$

(falls er existiert), einen Gibbs-Zustand zur ursprünglichen Wirkung (d.h. ohne äußeres Feld) definiert, da F_{ext} nur über den äußeren Strom $\int = 1/e \, d^* F_{ext}$ auf dem Rand ankoppelt.

(*) und zur t-Achse in $d = 4$

Theorem 2.26: Es sei $F_{\text{ext}} = 2\pi(v + H)$ mit $dV = 0$, wobei v der ganzzahlige ('Vortex')-Anteil von F_{ext} ist. Weiter bezeichne $\text{dist}(p, d^*H)$ den Abstand der Plakette p vom Träger von d^*H . Dann gibt es im Modell mit eingefrorener Länge $|\Phi| = a$ in $d \geq 2$ zu jedem H mit $\|H\|_\infty < 1/4$ und zu jeder inversen 'Eindringtiefe' $m > 0$ ein $\mu_0 > 0$, $e_0 > 0$, so daß für $e < e_0$ und $ae > \mu_0$ der thermodynamische Limes $\langle (dA)_p \rangle_{F_{\text{ext}}}$ existiert und

$$| \langle dH(p) \rangle_{F_{\text{ext}}} - 2\pi v(p) | < \text{const.} \cdot e^{-m \text{dist}(p, d^*H)}$$

Bemerkungen:

- i) Wenn wir $F_{\text{ext}} = \text{const.}$ auf allen Plaketten parallel zu einer Grundebene wählen, so sind auch v und H konstant und weiter $dv = dH = 0$. Der Strom d^*H hat dann aber nur Träger auf dem Rand der Ebenen parallel zu dieser Grundebene. Im thermodynamischen Limes gilt daher unter den Bedingungen der Aussage i)

$$\langle dH(p) \rangle_{F_{\text{ext}}} = 2\pi v(p)$$

- ii) Die Schranke $\|H\|_\infty < 1/4$ ist sicher nicht die bestmögliche. Im 2-Eichmodell (d.h. $a \rightarrow \infty$) gilt die Aussage i) sogar mit $\|H\|_\infty < 1/2$. Je nach der Geometrie des Trägers von f können auch noch bessere Schranken bewiesen werden. Genaueres wird in einer späteren Arbeit untersucht werden.

Beweis:

Es genügt, die Aussage für den Spezialfall $v = 0$ zu zeigen. Wegen $dV = 0$ gibt es nämlich ein ganzzahliges $\hat{A}$ mit $d\hat{A} = v$ und die allgemeine Aussage folgt nach einer Variablentransformation $A \rightarrow A + \hat{A}$, die $S_H(A, \Phi)$ invariant läßt. Für $v = 0$ brauchen wir jedoch nur die Transformation (2.23) von [Balaban et al. 1984] sowie die anschließende Polymerentwicklung (2.31) geeignet anzupassen. Nach der Zerlegung von A in einen kompakten und einen diskreten Anteil erhalten wir zunächst den Erwartungswert von

$$dH(p) + 2\pi n_z(p)$$

(*) Der thermodynamische Limes des Kerns $(d^{-1} d^*)_{pp}$ existiert punktweise, wie man sich durch Fouriertransformation leicht überlegt

mit der Wirkung

$$-\frac{1}{2e^2} \|d_\lambda H\|^2 - \frac{1}{e^2} (d_\lambda H, 2\pi(n_2 - H)) - \frac{2\pi^2}{e^2} \|n_2 - H\|^2 + \sum_{b \in \Lambda_1} a^2 \cos H_b$$

sowie der Zwangsbedingung $d_\lambda n_2 = 0$. Wir schreiben $2\pi e^{-2} (d_\lambda H, H) = 2\pi e^{-2} (H, d_\lambda^* H)$ und schlagen diesen Teil der Wirkung zum a priori Maß hinzu:

$$D_\lambda W^H(H) = \prod_{b \in \Lambda_1} N(d^* H(b))^{-1} e^{a^2 \cos H_b} e^{\frac{2\pi}{e^2} H_b d^* H(b)}$$

$N(d^* H)$ ist die zugehörige Normierungskonstante^(*). Man beachte, daß für a groß genug und a nicht zu klein dW^H immer noch beliebig stark am $A_b = 0$ zentriert werden kann, da H beschränkt ist. Wenn wir nun von der Wirkung (2.49) die Selbstenergie $(-2\pi^2/e^2) \|H\|^2$ wieder subtrahieren und die Polymerentwicklung aus § 2.2 durchführen, erhalten wir schließlich (vgl. (2.31)):

$$\langle dH(p) \rangle_{\Lambda, 2\pi H}^{|\Phi|=\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\substack{\delta_i \in P_p(\Lambda^\infty) \\ \nu(\delta_i)=1}} \sum_{\substack{\gamma_1, \dots, \gamma_n \\ \in P(\Lambda^\infty)}} \Phi_c(\gamma_1, \dots, \gamma_n) \prod_{i=0}^n z_\Lambda(\delta_i, p, H) \quad (2.50)$$

$P(\Lambda^\infty)$ ist wieder die Menge der gewöhnlichen Polymere, $P_p(\Lambda^\infty)$ die Menge der Polymere, die mit der Plakette p zusammenhängen, $\nu(\gamma) = 1$ für p -Polymere und $\nu(\gamma) = 0$ für gewöhnliche Polymere. Die Aktivitäten sind für Polymere $\gamma \in \Lambda$ gegeben durch

$$z_\Lambda(\gamma, p, H) = \sum_{\gamma \subset \delta} \sum_{\substack{d_\lambda n_2 = 0 \\ \gamma \cup \text{supp } n_2 = \delta}} e^{-\frac{2\pi^2}{e^2} \|n_2\|^2 + \frac{4\pi^2}{e^2} (n_2, H)} \int D_\lambda W^H \mathbb{E} [1 + \nu(\gamma) (dH(p) + 2\pi n_2(p) - 1)] \quad (2.51)$$

wobei wie in (2.24) definiert ist. Um die Konvergenz der Entwicklung (2.50) zu zeigen, müssen die Aktivitäten (2.51) analog wie in Lemma (2.12) abgeschätzt werden. Da $1 + \nu(\gamma) ((dA)_p - 1)$ beschränkt ist und

$$|\mathbb{E}_r(H, n_2)| \leq 2 \exp\left(\frac{\pi^2}{e^2} n_2(p)^2 + \frac{1}{2e^2} dH(p)^2\right)$$

(*) Man beachte $A_b \in [-\pi, \pi]$, d.h. $N(d^* H) < \infty$

wie zuvor gilt, müssen wir uns zusätzlich lediglich davon überzeugen, daß die veränderten 'Vortexanregungen' in n_2 immer noch klein gehalten werden können. Dies ist in Anhang C gezeigt.

Hiermit ist die Konvergenz von (2.50) für $e^2 < e_o^2$, und $a e > \mu$, also gewährleistet. Die Behauptung folgt nun aus der Tatsache, daß die Aktivität eines p-Polymers δ_o , die in jedem Summanden von (2.50) genau einmal auftritt, immer Null ist, falls δ_o weit genug von $\text{supp } d^*H$ entfernt ist. Man erkennt dies daran, daß in diesem Fall das Integrationsmaß invariant ist unter $A \rightarrow -A$, $n_2 \rightarrow -n_2$. Sei nämlich $|\delta_o| < 1/2 \text{ dist}(p, d^*H)$. Dann ist $\delta_o \cap d^*(\text{supp } d^*H) = \emptyset$, und wir dürfen klarerweise $D_\Lambda W^H$ durch $D_\Lambda W$ ersetzen. Zusätzlich ist aber auch das Maß in den Vortices n_2 nicht mehr von H abhängig. Wir können nämlich einen rechteckigen Kasten $K \supset \delta_o$ wählen, so daß $K \cap \text{supp}(d^*H)$ immer noch leer ist. Wenn wir K offen wählen, so folgt mit der Einbettung $i_K: \Omega_K \rightarrow \Omega_\Lambda$

$$d_K^* i_K^* H = i_K^* d_\Lambda^* H = 0$$

Folglich gibt es ein $w \in \Omega_K^3$ mit $d_K^* w = i_K^* H$ und daher gilt für n_2 mit $d_\Lambda n_2 = 0$ und $\text{supp } n_2 \subset K$:

$$\begin{aligned} (n_2, H)_\Lambda &= (i_K^* n_2, i_K^* H)_K \\ &= (i_K^* n_2, d_K^* w)_K \\ &= (d_K i_K^* n_2, w)_K \\ &= (i_K^* d_\Lambda i_K i_K^* n_2, w)_K \\ &= (d_\Lambda n_2, i_K w)_\Lambda \\ &= 0 \end{aligned}$$

wobei wir $d_K = i_K^* d \wedge i_K$ und $n_2 = i_K^* i_K^* n_2$ verwendet haben. Zu gegebenem $m > 0$ wählen wir nun ϵ_0 und μ_0 so, daß

$$e^{2m|\delta_0|} |z(\delta_0, p, H)|$$

immer noch klein genug ist, um die Konvergenz von (2.50) zu garantieren.

Da, wie soeben gezeigt, für p-Polymere δ_0 mit nicht-verschwindender Aktivität

$$\text{dist}(p, d^*H) < 2|\delta_0|$$

gilt, erhalten wir schließlich

$$| \langle dH(p) \rangle_{\Lambda, 2\pi H}^{|\Phi|=q} | < e^{-m \text{dist}(p, d^*H)} \cdot \text{const}$$

wobei sich die Konstante aus dem Betrag von (2.50) ergibt, nachdem wir $z(\delta_0, p)$ durch $\exp(2m|\delta_0|) z(\delta_0, H, p)$ ersetzt haben und daher gleichmäßig in Λ beschränkt bleibt. $\square$

Um nun umgekehrt zu zeigen, daß zumindest in dem Teil der Coulombphase mit kleinen v^2 (hohen Temperaturen im Ginzburg-Landau Modell) Meissner-Effekt und Flußquantisierung nicht auftreten, benütze ich die Methoden von [Brydges, Seiler 1986]. Hierzu sei angenommen, daß nach Ausintegration der Materiefelder eine Darstellung gilt der Form

$$\begin{aligned} S_{\Lambda, H}(\Phi) &:= \log \left[Z_{\Lambda, H}^{-1} \int D\lambda \Phi e^{S_{\Lambda, H}(\Phi, \lambda)} \right] \\ &= \sum_{d_\lambda^* n_i = 0} c_\lambda(n_i) \cos(\Phi, n_i) \end{aligned} \quad (2.52a)$$

wobei $Z_{\Lambda, H}$ die Normierung für $A = 0$ ist. Die Koeffizienten c_λ seien reell und genügen der Konvergenzbedingung

$$\sup_{b \in \Lambda_1} \sum_{\substack{d_\lambda^* n_i = 0 \\ n_i(b) \neq 0}} |c_\lambda(n_i)| \|n_i\|_2^{2d+2} < \delta \quad (2.52b)$$

wobei wir durch geeignete Wahl der Parameter in $S_{\Lambda, H}$ $\delta > 0$ beliebig klein machen können. (2.52) gilt beispielsweise im Modell mit eingefrorener Länge $|\Phi| = a$, falls a klein genug ist. Für eine genauere Diskussion siehe [Brydges, Seiler 1986].

Theorem 2.27: Sei $S \in \Omega_{\Lambda}^2(\mathbb{Z})$ die charakteristische Funktion einer abgeschlossenen Menge von Plaketten, $d_{\Lambda} S = 0$. Dann gilt unter der Bedingung (2.52b) für beliebige äußere Felder F_{ext}

$$|\langle (d_{\Lambda} H, S) \rangle_{\Lambda, F_{\text{ext}}} - (F_{\text{ext}}, S_{\Lambda})| \leq \|S\|_1 \frac{de^2}{2} \delta$$

Bemerkung:

Wenn wir F_{ext} wieder konstant auf allen Plaketten parallel zur x_1, x_2 -Ebene wählen und für S einen Stapel von Plaketten nehmen, der dual ist zu einer Geraden parallel zur X_3 -Achse und vom Boden bis zum Deckel von Λ reicht (da Λ abgeschlossen ist, gilt dann $d_{\Lambda} S = 0$), so erhalten wir im thermodynamischen Limes eine in x_3 -Richtung translationsinvariante Anordnung. Der Fluß durch eine Plakette $p \in \text{supp } S$ ergibt sich daher, wenn wir $\langle (d_{\Lambda} H, S) \rangle_{\Lambda, F_{\text{ext}}}$ durch die Anzahl der Plaketten in $\text{supp } S$ (d.h. durch $\|S\|_1$) dividieren und dann den thermodynamischen Limes ausführen. Das Theorem besagt also, daß der Fluß durch p in diesem Fall von $F_{\text{ext}}(p)$ dem Betrag nach um weniger als $\frac{de^2}{2} \delta$ abweichen wird. In 4 Dimensionen müssen wir S in jeder Zeitschicht entsprechend wie oben wählen.

Beweis:

Es gilt (ich setze von jetzt ab $F = F_{\text{ext}}$)

$$(d_{\Lambda} H - F, S) e^{-\frac{1}{2e^2} \|d_{\Lambda} H - F\|^2} = -e^2 (A_{\Lambda}^{-1} d_{\Lambda}^* S, \frac{\partial}{\partial H} e^{-\frac{1}{2e^2} \|d_{\Lambda} H - F\|^2})$$

Durch partielle Integration erhalten wir also

$$\begin{aligned} \langle (d_{\Lambda} H - F, S) \rangle_{\Lambda, F} &= e^2 \langle (A_{\Lambda}^{-1} d_{\Lambda}^* S, \frac{\partial S_M(H)}{\partial H}) \rangle_{\Lambda, F} \\ &= -e^2 \sum_{d_{\Lambda}^* n_i = 0} c_{\Lambda}(n_i) (A_{\Lambda}^{-1} d_{\Lambda}^* S, n_i) \langle \sin(H, n_i) \rangle_{\Lambda, F} \end{aligned}$$

Wie in [Brydges, Seiler 1986] wählen wir nun zu jedem n_1 eine 2-Form $n_2(n_1) \in \Omega_\Lambda^2(Z)$ mit

$$d_\Lambda^* n_2(n_1) = n_1$$

und

$$\|n_2(n_1)\|_1 \leq \frac{1}{2} \|n_1\|_2^2$$

Wegen $d_\Lambda S = 0$ erhalten wir

$$\begin{aligned} & | \langle (d_\Lambda H, S) \rangle_{\Lambda, \mathbb{F}} - (\mathbb{F}, S) | \\ & \leq e^2 \sum_{d_\Lambda^* n_1 = 0} |C_\Lambda(n_1)| | (S, n_2(n_1)) | \\ & \leq e^2 \sum_{d_\Lambda^* n_1 = 0} |C_\Lambda(n_1)| \left[\sum_{p \in \text{supp } n_2(n_1)} |S(p)| \right] \|n_2(n_1)\|_\infty \\ & \leq e^2 \|S\|_1 \sup_{p \in \Lambda_2} \sum_{d_\Lambda^* n_1 = 0, p \in \text{supp } n_2(n_1)} |C_\Lambda(n_1)| \|n_2(n_1)\|_\infty \end{aligned}$$

Da $\|n_2(n_1)\|_\infty \leq \|n_2(n_1)\|_1$ und eine Plakette $p \in \text{supp } n_2(n_1)$ von einem Bond $b \in \text{supp } n_1$ nicht weiter als $\|n_2(n_1)\|_1$ entfernt sein kann, ist dies weiter beschränkt durch

$$\begin{aligned} & \leq e^2 \|S\|_1 \sup_{b \in \Lambda_1} \sum_{d_\Lambda^* n_1 = 0, b \in \text{supp } n_1} |C_\Lambda(n_1)| \|n_2(n_1)\|_1 \|2n_2(n_1)\|_1^d \cdot d \\ & \leq \frac{de^2}{2} \|S\|_1 \sup_{b \in \Lambda_1} \sum_{d_\Lambda^* n_1 = 0, b \in \text{supp } n_1} |C_\Lambda(n_1)| \|n_1\|_2^{2d+2} = \frac{de^2}{2} \|S\|_1 \delta \end{aligned}$$

wobei wir die Anzahl der Bonds im Abstand $\|n_2(n_1)\|_1$ von p durch $2\|n_2(n_1)\|_1^d \cdot d$ abgeschätzt haben. $\square$

Als nächstes untersuche ich jetzt die freie Energie einer einzelnen Vortexlinie (Vortexblatt in $d = 4$), die dem System aufgezwungen wird. Hierzu wählen wir als äußeres Feld F eine beliebige 2-Form mit Werten in $2\pi \mathbb{Z}$, die an vorgegebenen Stellen die Bianchi-Identität verletzt:

$$d_\Lambda F = 2\pi M$$

$M \in \Omega_\Lambda^3(Z)$ interpretieren wir als eine äußere Monopoldichte (Monopolstrom in $d = 4$). Konkret wählen wir für M ein äußeres Monopol-Antimonopol Paar M_x im Abstand x :

$$M_x(\cdot) := \delta_c(\cdot) - \delta_{c_x}(\cdot)$$

wobei c_x der um $x \in \mathbb{Z}^3$ verschobene Würfel $c \in \mathcal{A}_3$ ist. (Man beachte, daß Monopoldichten pseudoskalar sind und in unserem Rahmen durch die zugehörigen dualen 3-Formen beschrieben werden). In $d = 4$ wählen wir statt dessen einen geschlossenen Monopolstrom ('t Hooft-Loop) $M_{T,x}$. Hierzu müssen wir $M_{T,x}$ auf jeder Zeitschicht $0 < x_0 < T$ wie oben definieren und die Endpunkte dieser Linien auf den Hyperebenen $x_0 = 0$ bzw. $x_0 = T$ geeignet verbinden, so daß sich insgesamt ein rechteckiger Ring der Länge T in Zeitrichtung und $|x|$ in Raumrichtung ergibt, der aus aneinandergehängten Würfeln besteht.

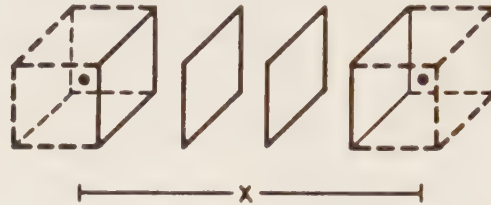


Fig. 4: Eine mögliche Wahl für F . Gezeichnet sind die Plaketten in der $t = \text{const.}$ Hyperfläche, auf denen $F \neq 0$ ist. Man wählt F konstant auf diesen Plaketten, so daß $dF = 2\pi M \neq 0$ nur auf den Würfeln dual zu den gezeichneten Punkten im Abstand x .

Die Zustandssumme im äußeren Feld F ist definiert

$$Z_{\Lambda}(F) = Z_{\Lambda}(-F) = \int D_A D_\phi \exp \left\{ -\frac{1}{2e^2} \|d_A A + F\|^2 - \int d^4x \left(\frac{1}{2} (d_A^* \phi)^2 + S_H(A + \phi) \right) \right\}$$

und die freie Energie als

$$V_{\Lambda}(M_x) := -\ln [Z_{\Lambda}(F) / Z_{\Lambda}(0)]$$

$V_{\Lambda}(M_x)$ hängt tatsächlich von der konkreten Wahl des Vortex $F \in \Omega_{\Lambda}^2(2\pi\mathbb{Z})$ mit $dF = 2\pi M_x$ nicht ab, da ein anderes $\hat{F}$ sich von F nur um ein monopol-freies Feld $d\hat{A}$ mit $\hat{A} \in \Omega_{\Lambda}^1(2\pi\mathbb{Z})$ unterscheiden würde:

$$\hat{F} = F + d\hat{A}$$

Dies kann jedoch durch eine Variablensubstitution

$$A \rightarrow A + \hat{A}$$

wieder zum Verschwinden gebracht werden^(*), da $S_H(A, \phi)$ periodisch in A ist.

(*) Im Eichfixierungsterm erhält man dann zwar $S_{gf}(d^*A - d^*\hat{A})$, was aber anschließend durch eine reine Eichtransformation $\chi = \Delta^{-1} d^*\hat{A}$ wieder wettgemacht werden kann.

In $d = 4$ wird die freie Energie entsprechend definiert als

$$V_{\Lambda}(M_{T,x}) = -\frac{1}{T} \log [Z_{\Lambda}(T)/Z_{\Lambda}(0)]$$

Im thermodynamischen Limes wird das Potential

$$V_m(x) := \lim_{\Lambda} V_{\Lambda}(M_x)$$

bzw.

$$V_m(x) := \lim_{T \rightarrow \infty} \lim_{\Lambda} V_{\Lambda}(M_{T,x})$$

oft auch als Potential eines statischen äußeren Monopol-Antimonopol Paares interpretiert. Je nachdem, ob $V_m(x)$ beschränkt bleibt oder linear in x anwächst, spricht man dann von freien äußeren Monopolen bzw. linearem 'Confinement' äußerer Monopole. Diese Sprechweise hatte sich ursprünglich in kompakten reinen Eichtheorien (d.h. ohne Materiefelder) entwickelt. Dort hängt $Z_{\Lambda}(F)$ allerdings auch für beliebige F (d.h. nicht notwendigerweise mit Werten im $2\pi\mathbb{Z}$) nur von dF ab, da nun in der Variablentransformation $A \rightarrow A + \hat{A}$ $\hat{A}$ beliebige Werte haben darf. In diesem Sinne ist $V_m(x)$ dann tatsächlich nur von der äußeren Monopolverteilung abhängig. Im allgemeineren Fall mit Materiefeldern ist nicht ganz einzusehen, warum im Sinne einer Interpretation als freie Energie äußere Monopole nicht das Infimum über alle F zu vorgegebenem $dF = 2\pi M$ zu nehmen wäre. Hiermit ließe sich jedoch niemals eine Confinement-Aussage herleiten, da wir als obere Schranke für $-\ln[Z_{\Lambda}(F)/Z_{\Lambda}(0)]$ in jedem Fall die rein Coulomb'sche Wechselwirkungsenergie

$$\frac{4\pi^2}{2e^2} (M, \Delta_{\Lambda}^{-1} M)$$

erhalten würden (man wähle für F das magnetostatische Coulombfeld $F = 2\pi d_{\Lambda}^* \Delta_{\Lambda}^{-1} M$ welches 1^2 -orthogonal zu dA ist).

Mir scheint es daher angebrachter, $V_m(x)$ als freie Energie einer Vortexlinie mit vorgegebenem Anfangs- und Endpunkt zu interpretieren. In der Coulombphase wird das dynamisch fluktuierende elektromagnetische Feld den monopolfreien Anteil $d\Delta^{-1} d^*F$ des von außen aufgeprägten Vortextfeldes näherungsweise kompensieren (Theorem 2.27), so daß sich die freie Energie asymptotisch ähnlich wie die rein Coulomb'sche Wechselwirkungsenergie verhalten wird. Dies wird (zumindest für große e^2) in Theorem 2.28 gezeigt.

In der Higgsphase dagegen ist dieser Abschirmungseffekt wegen der Flußquantisierung stark unterdrückt, und die freie Energie steigt daher proportional zur Länge der kürzesten Vortexlinie zwischen den äußeren Monopolen (Theorem 2.29). In einem mehr formalistischen Rahmen läßt sich $Z(F)/Z(0)$ auch einfach als Erwartungswert eines 'Unordnungsparameters' bezeichnen, dessen qualitatives Verhalten geeignet ist, zwischen verschiedenen Phasen zu unterscheiden: Er fällt nicht (bzw. in $d = 4$ nur schwach) ab in der 'ungeordneten' Coulombphase, wogegen er in der geordneten Higgsphase stark abfällt. Der Bequemlichkeit halber werde ich im weiteren aber auch hin und wieder die Confinement-Sprechweise benutzen.

Theorem 2.28: Unabhängig von λ und v^2 gilt für alle $e^2 \geq 0$ und alle $F \in \Omega_\lambda^2$

i) $Z_\lambda(F) / Z_\lambda(0) \geq W_{\lambda,e^2}(F)$ (vgl. 2.46)

ii) $Z_\lambda(F) / Z_\lambda(0)$ ist eine monoton fallende Funktion von e^{-2} .

Bevor ich zum Beweis komme, möchte ich die Aussagen interpretieren und beschränke mich hierzu auf den Fall $(2\pi)^{-1}F$ ganzzahlig. Nach Lemma 2.22 i) ist dann in $d = 4$ $W_{\lambda,e^2}(F)$ gerade der Erwartungswert des Wilson-Loops $e^{i(A,j)}$ im reinen $U(1)$ -Eichmodell mit Villain-Polyakov Wirkung, $\beta = e^2/4\pi^2$ und $2\pi j = (dF)^*$. In der Deconfinementphase dieses Modells fällt der Erwartungswert des Wilson-Loops nicht schneller als exponentiell mit dem Umfang $\|\delta\|_1^{(*)}$, und folglich auch nicht der 't Hooft-Loop in unserem Higgsmodell, falls $e^2 > e_c^2 = 4\pi^2\beta_c^{u(1)}$. In $d = 3$ erhalten wir stattdessen die 2-Punktfunktion $e^{i(\varphi,q)}$ im XY-Modell bei Temperatur $\beta = e^2 / 4\pi^2$, wobei $q(\cdot) = \delta_x(\cdot) - \delta_y(\cdot)$ gerade die Punkte im dualen Gitter (Würfel im ursprünglichen Gitter) bezeichnet, auf denen die Monopole sitzen, d.h. $2\pi q = 2\pi M^* = (dF)^*$. Für $e^2 > e_c^2 = 4\pi^2\beta_c^{XY}$ ist dieses Modell in seiner masselosen Phase und daher die Monopole ebenfalls nicht 'confined'. (Die Aussage i) wurde implizit bereits in [Brydges, Fröhlich, Seiler 1979b] und in [Fröhlich, Spencer 1982] erwähnt.)

Um die Aussage ii) zu interpretieren, beachte man die Identität

$$Z_\lambda(F) = e^{-\frac{1}{2e^2}(d_\lambda F, \Delta_\lambda^{-1} d_\lambda F)} Z_\lambda(d_\lambda \Delta_\lambda^{-1} d_\lambda^* F)$$

(*) Ich nehme hier an, daß dies für alle $\beta > \beta_c^{u(1)}$ gilt.

die aus der orthogonalen Zerlegung

$$\|d_A F + F\|^2 = \|d_A^* \Delta_A^{-1} d_A F\|^2 + \|d_A F + d_A \Delta_A^{-1} d_A^* F\|^2$$

folgt. Da in $d \geq 3$ das Coulombpotential $\Delta^{-1} dF$ des magnetischen Stroms dF beschränkt bleibt, ist $\exp[-\frac{1}{2e^2}(dF, \Delta^{-1} dF)]$ in $d = 3$ positiv nach unten beschränkt bzw. fällt in $d = 4$ höchstens exponentiell mit der ℓ^1 -Norm von dF , also mit dem Umfang des 't Hooft-Loops. Wir verlieren also nichts in unserem Kriterium für die Higgsphase, wenn wir F durch $d_A \Delta_A^{-1} d_A F =: \hat{F}$ ersetzen. Nun ist $Z_\Lambda(\hat{F})/Z_\Lambda(0)$ aber nach unten beschränkt durch den Wert bei $e^2 = 0$ (Aussage ii). In diesem Limes ist A eingefroren auf $A = -\Delta_A^{-1} d_A^* F$ und wir erhalten in Analogie zu Lemma 2.23

$$Z_\Lambda(d_A \Delta_A^{-1} d_A^* F)/Z_\Lambda(0) \geq Z_\Lambda^{\text{Spin}}(\Delta_A^{-1} d_A^* F)/Z_\Lambda^{\text{Spin}}(0)$$

mit

$$Z_\Lambda^{\text{Spin}}(h) = \int D_A \nu(R) D_A \varphi e^{\sum_{\langle xy \rangle \in \Lambda} R_x R_y \cos(d\varphi - h)_{xy}}$$

und dem radialen à priori Maß $d\nu$ aus (2.16). Im Limes eingefrorene Länge $R = a$ wird hieraus wieder ein XY-Modell wie in (2.47), bei inverser Temperatur $\beta = a^2$, mit dem Unterschied, daß die Villain-Wirkung ersetzt ist durch $\exp[\beta \cos(d\varphi)]$. Ich will mich der allgemeinen Meinung anschließen und annehmen, daß dies keinen qualitativen Unterschied ausmacht und deswegen Satz 2.24 in ähnlicher Weise gelten sollte. Da $(2\pi)^{-1} F$ ganzzahlig ist, gilt

$$\inf_{n_2 \in \Omega_\Lambda^2(\mathbb{Z})} \|d_A \Delta_A^{-1} d_A^* F + 2\pi n_2\|^2 \leq \|d_A^* \Delta_A^{-1} d_A F\|^2$$

und es würde zumindest im Modell mit eingefrorener Länge $|\phi| = a$ folgen:

$$Z_\Lambda(F)/Z_\Lambda(0) \geq \exp[-c(d_A F, \Delta_A^{-1} d_A F)] \quad (2.53)$$

falls $a^2 < \beta_1$ (siehe Satz 2.24). Wir erhalten also insgesamt eine qualitative Übereinstimmung zwischen der Region II in Fig. 2 und dem Gültigkeitsbereich des 'Deconfinementkriteriums' für ganzzahlige äußere Monopole.

Beweis von Theorem 2.28:

Zum Beweis von i) beachte man, daß wegen der Invarianz $A \rightarrow -A$, $\phi \rightarrow \bar{\phi}$ gilt

$$Z_{\Lambda}(\bar{\phi}) / Z_{\Lambda}(0) = e^{-\frac{\|\bar{\phi}\|^2}{2e^2}} < e^{\langle d_{\Lambda} A, e^{-2} \bar{\phi} \rangle_{\Lambda, \alpha} \frac{\partial \lambda}{\partial \lambda}}$$

Hieraus folgt die Behauptung i) mit (2.44). Zum Beweis von ii) verfahren wir nach dem gleichen Schema wie [Brydges, Fröhlich, Seiler 1979 a]. Wir schreiben in einer beliebigen α -Eichung (NB: $Z_{\Lambda}(\bar{\phi}) / Z_{\Lambda}(0)$ ist eich-invariant)

$$Z_{\Lambda}(\bar{\phi}) = \int d\mu_{\Lambda, \alpha}^{\bar{\phi}}(A) D_{\hat{\Lambda}} \nu(R) D_{\Lambda} \varphi e^{\sum_{\langle xy \rangle \in \Lambda_1} R_x R_y \cos(\bar{A} + d\bar{\phi})_{xy}}$$

wobei $d\mu_{\Lambda, \alpha}^{\bar{\phi}}$ sich aus $d\mu_{\Lambda, \alpha}^0$ (2.21) ergibt, indem wir $\|d_{\Lambda} A\|^2$ durch $\|d_{\Lambda} A + \bar{\phi}\|^2$ ersetzen. Differenzieren nach e^{-2} holt einen Faktor $-1/2 \|d_{\Lambda} A + \bar{\phi}\|^2$ aus dem Exponenten herunter. Dies ergibt:

$$\begin{aligned} & -2 Z_{\Lambda}(0)^2 \frac{d}{de^{-2}} [Z_{\Lambda}(\bar{\phi}) / Z_{\Lambda}(0)] \\ &= \int d\mu_{\Lambda, \alpha}^{\bar{\phi}}(A) d\mu_{\Lambda, \alpha}^0(A') D_{\hat{\Lambda}} \nu(R) D_{\hat{\Lambda}} \nu(R') D_{\Lambda} \varphi D_{\Lambda} \varphi' (\|d_{\Lambda} A + \bar{\phi}\|^2 - \|d_{\Lambda} A'\|^2) \\ & \exp \sum_{\langle xy \rangle \in \Lambda_1} [R_x R_y \cos(\bar{A} + d\bar{\phi})_{xy} + R'_x R'_y \cos(\bar{A}' + d\bar{\phi})_{xy}] \end{aligned} \quad (2.54)$$

Es verbleibt zu zeigen, daß das Integral über die verdoppelten Variablen positiv ist. Hierzu wählen wir die üblichen Variablentransformationen [Ginibre 1970]: Zunächst dürfen wir überall wegen der Periodizität des Kosinus φ durch 2φ ersetzen^(*). Dann definieren wir

$$\varphi_x^{\pm} := \varphi_x \pm \varphi'_x, \quad A_b^{\pm} := \frac{1}{2} (A_b \pm A'_b), \quad R_x^{\pm} := \frac{1}{2} (R_x \pm R'_x)$$

Es gilt $d\mu_{\Lambda, \alpha}^{\bar{\phi}}(A) d\mu_{\Lambda, \alpha}^0(A') = d\mu_{\Lambda, \alpha}^{\bar{\phi}/\sqrt{2}}(\sqrt{2} A^+) d\mu_{\Lambda, \alpha}^{\bar{\phi}/\sqrt{2}}(\sqrt{2} A^-)$ und $D_{\Lambda} \varphi D_{\Lambda} \varphi' = D_{\Lambda} \varphi^+ D_{\Lambda} \varphi^-$, letzteres, da die Abbildung $U(1) \times U(1) \rightarrow U(1) \times U(1)$, $(\varphi, \varphi') \mapsto (\varphi^+, \varphi^-)$ ein Epimorphismus ist und normierte Haarmaße unter Epimorphismen in normierte Haarmaße übergehen. Weiter gilt:

$$\|d_{\Lambda} A + \bar{\phi}\|^2 - \|d_{\Lambda} A'\|^2 = 4(d_{\Lambda} A^+ + \frac{\bar{\phi}}{2}, d_{\Lambda} A^- + \frac{\bar{\phi}}{2})_{\Lambda}$$

(*) Das Integral $\int_{-\pi}^{\pi} d\varphi f(n\varphi)$ ist für periodische f (d.h. mit Periode 2π) von $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ unabhängig.

Schließlich schreiben wir

$$R_x R_y = a_{xy} - b_{xy} \quad , \quad R'_x R'_y = a_{xy} + b_{xy}$$

wobei

$$a_{xy} = R_x^+ R_y^+ + R_x^- R_y^- \quad , \quad b_{xy} = R_x^+ R_y^- + R_x^- R_y^+$$

Dies liefert

$$\begin{aligned} & R_x R_y \cos(H + 2d\varphi)_{xy} + R'_x R'_y \cos(H' + 2d\varphi')_{xy} \\ &= 2 a_{xy} \cos(H^+ + d\varphi^+)_{xy} \cos(H^- + d\varphi^-)_{xy} \\ &+ 2 b_{xy} \sin(H^+ + d\varphi^+)_{xy} \sin(H^- + d\varphi^-)_{xy} \end{aligned}$$

Wenn wir die Exponentialfunktion in diesen Ausdrücken in ihre Taylorreihe entwickeln, erhalten wir eine Summe über j von Ausdrücken der Form

$$P_j(R^+, R^-) f_j(H^+, \varphi^+) f_j(H^-, \varphi^-)$$

wobei P_j Polynome mit positiven Koeffizienten sind. Es gilt

$$\int D\psi(R) D\psi(R') P_j(R^+, R^-) \geq 0$$

da in jedem Fall $R^\pm \geq 0$ nach Definition und das Produktmaß unter der Transformation $R^\pm \rightarrow \pm R^\pm$ invariant ist (ungerade Potenzen in R tragen daher nichts bei). Wir erhalten daher für das Integral in (2.54) eine Summe über j von Ausdrücken der Form

$$Q_j \sum_{p \in \Lambda_2} \mathcal{F}_j^+(p) \mathcal{F}_j^-(p)$$

mit positiven Koeffizienten Q_j und

$$\mathcal{F}_j^\pm(p) := \int d\mu_{\lambda, \alpha}^{\mp/|\sqrt{2}|}(\sqrt{2} H^\pm) D_\lambda \varphi^\pm f_j(H^\pm, \varphi^\pm) (d_\lambda H^\pm(p) + \frac{1}{2} F(p))$$

Wegen $\mathcal{F}_j^+(p) = \mathcal{F}_j^-(p)$ folgt die Behauptung. $\square$

Theorem 2.29:

- i) In $d \geq 2$ gibt es zu jedem $M > 0$ positive Schranken $e_0(M)$ und $a_0(M)$, so daß im Modell mit eingefrorener Länge $|\Phi| = a$ für $e^2 \leq e_0^2$, $a > a_0$ und $F \in \Omega_\lambda^2(2\pi\mathbb{Z})$ gilt:

$$Z_\lambda(F)/Z_\lambda(0) \leq \text{const } e^{r|\text{supp } F|} e^{-M\mathcal{A}_\lambda(F)}$$

Hierbei ist $r = 1 + \ln 2$ und $\mathcal{A}_\lambda(F) = \inf_{d_\lambda n_2 = 0} |\text{supp } (F + 2\pi n_2)|$

ii) Aussage i) gilt auch im Modell mit variabler Länge, falls $v^2 > 4a_0^2 + d/2$.

Bemerkung:

Zu vorgegebenem $M = (2\pi)^{-1} dF$ ($M = M_x$ oder $M = M_{T,x}$) wählen wir nun F wie in Fig. 4 skizziert. Im Anhang A wird gezeigt, daß dann das Infimum in der Definition von $\mathcal{A}(F)$ für $n_2 = 0$ angenommen wird. Für $M > \gamma$ folgt daher in $d = 4$ das 'Area Law' für den 't Hooft-Loop (da $|\text{supp } F| = |T \cdot x|$) bzw. in $d = 3$ exponentielles Abfallen des Unordnungsparameters $Z(F) / Z(0)$ (da $|\text{supp } F| = |x|$).

Beweis:

Ich zeige die Behauptung i) zunächst für $e^2 = e_0^2$ und $a > a_0$. Für $e^2 < e_0^2$ folgt sie mit Theorem 2.28ii. Die Behauptung ii) folgt anschließend aus einer weiteren Korrelations-Ungleichung. Wir benutzen

$$Z_\Lambda(F) / Z_\Lambda(0) = \frac{d}{ds} \ln(Z_\Lambda(0) + s Z_\Lambda(F)) \Big|_{s=0}$$

und führen eine Polymerentwicklung ähnlich wie zur Herleitung von (2.30/31) durch. Hierzu schreiben wir zunächst wie in (2.23)

$$Z_\Lambda(F) = \int \mathcal{D}_\Lambda H \sum_{d_\Lambda n_2 = 0} e^{-\frac{1}{2e^2} \|d_\Lambda H + F + 2\pi n_2\|^2 + \alpha^2 \sum_{b \in \Lambda_1} \cos H_b} \quad (2.55)$$

und definieren jetzt $S_p(H, F + 2\pi n_2)$ für Plaketten $p \in \Lambda_2$ gemäß

$$1 + S_p = \exp\left[-\frac{1}{2e^2} (dH(p)^2 + 2dH(p)(F(p) + 2\pi n_2(p)))\right]$$

Nach einer Umnormierung erhalten wir wie in (2.24)

$$Z_\Lambda(F) = \sum_{Y \subset \Lambda_2} \sum_{d_\Lambda n_2 = 0} K_\Lambda(n_2, Y, F)$$

mit

$$K_\Lambda(n_2, Y, F) = e^{-\frac{1}{2e^2} \|F + 2\pi n_2\|^2} \int \mathcal{D}_\Lambda W(H) S^Y$$

Ähnlich wie zuvor definieren wir nun $\Gamma = Y \cup \text{supp } (F + 2\pi n_2)$ und zerlegen Γ wieder in ein maximales F-Polymer Γ_F und die Zusammenhangskomponenten von $\Gamma \setminus \Gamma_F$. Zur Definition von F-Polymeren genügt es hierbei $K_2(F)$ durch $\text{supp } F$ zu ersetzen, d.h. ein F-Polymer ist entweder leer oder Vereinigung von gewöhnlichen Polymeren, von denen jedes mit $\text{supp } F$ zusammenhängt. Hiermit gehen die Faktorisierungseigenschaften durch wie zuvor

und wir erhalten analog zu (2.31)

$$\begin{aligned} Z_\Lambda(F)/Z_\Lambda(0) \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\nu(\delta_0)=1} \sum_{\delta_1, \dots, \delta_n} \phi_c(\delta_0, \dots, \delta_n) \prod_{i=0}^n \tilde{z}_\Lambda(\delta_i, F) \end{aligned} \quad (2.56)$$

mit Aktivitäten $\tilde{z}_\Lambda(\delta, F) = 0$, falls $\delta \notin \Lambda$ und $\tilde{z}_\Lambda(\delta, F) = z_\Lambda(\tilde{\delta}, \nu(\delta)F)$ falls $\delta \in \Lambda$, wobei $\nu(\gamma) = 0$ für gewöhnliche Polymere, $\nu(\delta) = 1$ für F-Polymere und

$$\begin{aligned} z_\Lambda(\tilde{\delta}, F) &= \sum_{\gamma \subset \tilde{\delta}} \sum_{d_\Lambda n_2 = 0, \gamma \cup \text{supp}(F + 2\pi n_2) = \tilde{\delta}} R_\Lambda(n_2, \gamma, F) \\ & (= 0 \text{ falls die Summe leer ist}) \end{aligned}$$

Wenn wir $m_2 = (2\pi)^{-1}F + n_2$ einführen, können wir feststellen, daß Lemma 2.12 jetzt analog gilt (setze $h = 0$), weil für den dortigen Beweis $d_\Lambda n_2 = 0$ nicht benutzt wurde. Hieraus folgt die Konvergenz der Entwicklung (2.56) für $e = e_0$ und $a > a_0 = \mu_0/e_0$ (s. Lemma 2.12). Indem wir e_0 klein genug und μ_0 groß genug wählen, können wir von den nicht verschwindenden Aktivitäten der F-Polymere δ_0 in (2.56) einen Faktor $\exp(-M|\delta_0|)$ abspalten und den Rest immer noch klein genug halten. Dies liefert schließlich wie in (2.32b)

$$Z_\Lambda(F)/Z_\Lambda(0) \leq \text{const.} \cdot e^{+|\text{supp } F|} e^{-M d_\Lambda(F)}$$

mit

$$\begin{aligned} d_\Lambda(F) &= \inf_{Z_\Lambda(\delta_0, F) \neq 0} |\delta_0| \\ &= \inf_{d_\Lambda n_2 = 0} |\text{supp}(F + 2\pi n_2)| \end{aligned}$$

Zum Beweis von ii) verfare ich analog wie [Kennedy, King 1986] im Beweis von Lemma 2.10, d.h. ich zeige

$$\langle e^{(\pi, h)} \rangle_{\Lambda, \alpha}^{21} \leq \langle e^{(\pi, h)} \rangle_{\Lambda, \alpha}^{|\varphi|=\alpha} \quad (2.57)$$

falls $v^2 > 4a^2 + d/2$. Die Behauptung folgt mit $h = -e^{-2} d^* F$ nach Multiplikation beider Seiten mit $\exp[-(1/2 e^{-2}) \|F\|^2]$. Zunächst beachte man,

daß wegen der Symmetrie $A \rightarrow -A$, $\phi \rightarrow \bar{\phi}$, $\exp(A, h)$ durch $\cosh(A, h)$ ersetzt werden darf. Durch Einführen verdoppelter Variabler erhalten wir (mit einer positiven Normierung 'const.')

$$\begin{aligned} & \langle \cosh(A, h) \rangle_{\Lambda, \alpha}^{|\phi|=\alpha} - \langle \cosh(A, h) \rangle_{\Lambda, \alpha}^{2\lambda} \\ &= \text{const.} \int d\mu_{\Lambda, \alpha}^0(A) d\mu_{\Lambda, \alpha}^0(A') D_{\Lambda} \nu(R) D_{\Lambda} \varphi D_{\Lambda} \varphi' [\cosh(A, h) - \cosh(A', h)] \\ & \quad \exp \sum_{\langle xy \rangle \in \Lambda_1} [\alpha^2 \cos(A + d\varphi)_{xy} + R'_x R'_y \cos(A' + d\varphi')_{xy}] \end{aligned}$$

Ähnlich wie in (2.54). Nun fahren wir analog fort, wie zum Beweis von Theorem 2.28, wobei wir

$$\cosh(A, h) - \cosh(A', h) = 2 \sinh(A^+, h) \sinh(A^-, h)$$

verwenden. Wegen

$$R_x^{\pm} = \frac{1}{2} (R_x' \pm \alpha)$$

erhalten wir nun eine Summe von Ausdrücken der Form

$$P_j(R^+, R^-) P_j(A^+, \varphi^+) P_j(A^-, \varphi^-)$$

wobei P_j Polynome in $(R' \pm \alpha)$ sind, und es bleibt zu zeigen, daß

$$\int D_{\Lambda} \nu(R') P_j(R^+, R^-) \geq 0$$

Wie in [Kennedy, King 1986] folgt dies aus der Aussage, daß

$$\int_0^{\infty} R dR (R-\alpha)^m (R+\alpha)^n \exp\left[-\frac{\gamma}{4} (R^2 - v^2)^2 - \frac{d}{2} R^2\right] \geq 0$$

für nicht-negative ganze Zahlen m, n , falls $4\alpha^2 \leq v^2 - d/2$. ▣

2.5 Neue Schranken an die Phasentrennlinie

Ich will mich nun auf ein unwesentlich abgeändertes Modell mit eingefrorener Länge konzentrieren und hierfür, basierend sowohl auf dem 't Hooft-Loop als auch auf der spontanen Symmetriebrechung in Landau-Eichung, neue und relativ enge Schranken an den Verlauf der Phasentrennlinie zwischen Coulomb- und Higgsphase angeben. Sie bestärken sehr stark die in Fig. 2 geäußerte Vermutung über den tatsächlichen Verlauf der Phasentrennlinie sowie noch mehr als zuvor die Annahme, daß $\langle \phi \rangle_{\text{Landau}}$ tatsächlich ein guter Ordnungsparameter für den Phasenübergang ist.

Das Modell wird dergestalt abgeändert, daß sich im Limes $e^2 \rightarrow 0$ das XY-Modell mit Villain Wirkung ergibt. Dies wurde auch andernorts bereits vorgeschlagen (siehe z.B. [Dasgupta, H Iperin 1981; Seiler 1982]). Die Wirkung im Volumen Λ lautet also jetzt mit $\Phi = a e^{i\varphi}$

$$S_{\Lambda, \alpha}^{Vi}(\mathbb{H}, \varphi) = -\frac{1}{2e^2} (\|\mathbf{d}_\Lambda \mathbb{H}\|^2 + \frac{1}{\alpha} \|\mathbf{d}_\Lambda^* \mathbb{H}\|^2) + S_{\mathbb{H}, \Lambda}^{Vi}(\mathbb{H}, \mathbf{d}_\Lambda \varphi) \quad (2.58)$$

mit

$$\begin{aligned} e^{S_{\mathbb{H}, \Lambda}^{Vi}(\theta)} &= \sum_{n_1 \in \Omega_\Lambda^1(\mathbb{Z})} e^{-\frac{a^2}{2} \|\theta + 2\pi n_1\|^2} \\ &= \text{const.} \sum_{n_1} e^{i(\theta, n_1)_\Lambda} e^{-\frac{1}{2a^2} \|n_1\|^2} \end{aligned} \quad (2.59)$$

Der Grund für diese Wahl ist die in (2.59) bereits dargestellt, äußerst einfache Form der Fouriertransformierten. Sie ist nichts anderes als eine diskrete Gauß'sche Verteilung und wurde für $A = 0$, also im reinen XY-Modell, bereits im Beweis von Theorem 2.25 benutzt. Eine Herleitung der sog. Poisson-Summationsformel (2.59) findet sich im Beweis von Lemma 2.22. Daß das neue Modell in der gleichen 'Universalitätsklasse' liegen und sich vom alten kaum unterscheiden sollte, liegt an der Tatsache, daß sowohl für $\theta \approx 0$ als auch für $\theta \approx \pi$ gilt

$$\beta(\cos \theta - 1) \approx \text{const.}(\beta) \log \left[\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{\beta}{2} (\varphi + 2\pi n)^2} \right]$$

Beide Seiten sind periodisch in φ , nehmen ihr Maximum bei $\varphi = 0$ und ihr Minimum bei $\varphi = \pi$ an und stimmen dort in ihren quadratischen Approximationen

jeweils überein^(*). Ich bezeichne im folgenden Erwartungswerte im Modell mit Wirkung (2.58) mit $\langle \cdot \rangle_{\Lambda, \alpha}^{V_i}$ und die entsprechenden Zustandssummen mit $Z_{\Lambda, \alpha}^{V_i}$, wobei ich die gleichen Randbedingungen wie in den Zuständen $\langle \cdot \rangle_{\Lambda, \alpha}^{V_i}$ (2.20) impliziere. e_c^2 ist der kritische Wert der Kopplungskonstanten im Z-Eichmodell (d.h. $a^2 = \infty$).

Theorem 2.30: Setze $\beta := a^2 (4d + a^2 e^2)^{-1}$. in $d \geq 3$ gibt es $\beta_1 \leq \beta_c^{xy}$ und $\beta_2 \geq e_c^{-2}$, so daß

- i) $\lim_{\Lambda} \langle \phi_x \rangle_{\Lambda, \alpha=0}^{V_i} \begin{cases} = 0 & , \quad \beta < \beta_1/4d \\ \neq 0 & , \quad \beta > \beta_2 \end{cases}$
- ii) $Z_{\Lambda}^{V_i}(F) / Z_{\Lambda}^{V_i}(0) \begin{cases} \geq \text{const.} \exp[-c_1(\beta)(d_1 F, d_1^{-1} d_1 F)] & , \quad \beta < \beta_1/4d \\ \leq \exp[-c_2(\beta) d_1(F)] & , \quad \beta > \beta_2 \end{cases}$
für alle $F \in \Omega_{\Lambda}^2(\mathbb{T} \times \mathbb{Z})$.

Bemerkung:

Falls in den Grenzfällen $e = 0$ oder $a = \infty$ die Aussagen mit $\beta_1 = \beta_c^{xy}$ und $\beta_2 = e_c^{-2}$ gültig sind, wofür ich starke Indizien im Laufe des Beweises liefern werde, so sind sie allgemein bis zu diesen Grenzen gültig. Zur Orientierung möchte ich das unter dieser Annahme folgende Phasendiagramm in Fig. 5 darstellen.

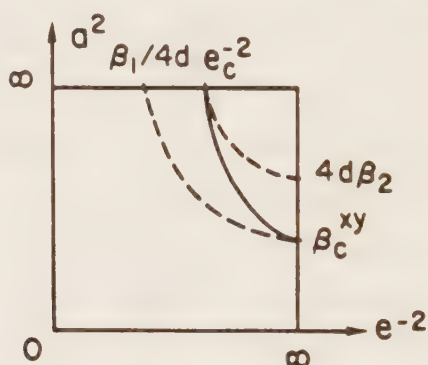


Fig. 5: Phasendiagramm in $d \geq 3$ nach Theorem 2.30 unter der Annahme $\beta_1 = \beta_c^{xy}$, $\beta_2 = e_c^{-2}$. Gestrichelt sind die Linien $\beta = \text{const.}$, durchgezogen die mutmaßliche Phasentrennlinie. Region I: Higgsphase, Region II: Coulombphase.

(*) Die Normierung $\text{const.}(\beta)$ ist bei $\theta = \pi$ entsprechend anders zu wählen. Für eine kritischere Untersuchung des Zusammenhangs siehe z.B. [Jersak et al. 1985] oder [Janke, Kleinert 1986].

Beweis:

Die Beweisidee ist durchwegs inspiriert von der Technik des Guth'schen Deconfinement-Beweises. Sie beruht auf Dualitätstransformationen und einer systematischen Verwendung von Korrelationsungleichungen, die es gestatten, Abschätzungen durch entsprechende Ausdrücke in den Grenzmodellen $e^2 = 0$ oder $a^{-2} = 0$ zu erhalten. Der wesentliche Trick besteht darin, an den geeigneten Zwischenschritten in den diskreten dualen Modellen den Laplace- de Rham-Operator Δ auf den v-Formen durch $4d \cdot \mathbb{1}$ zu ersetzen (NB: $\Delta < 4d \cdot \mathbb{1}$). Alle folgenden Rechnungen beziehen sich auf einen endlichen, offenen Komplex Λ mit trivialer (erweiterter) (Ko-)homologie, und ich lasse zur Vereinfachung der Notation die Indizierung Λ daher weg. Die in jeder Formel auftretende Normierungskonstante Z ändert ohne explizite Erwähnung von Fall zu Fall ihre Bedeutung. Sie ergibt sich jeweils aus dem Zähler für $F = 0$ und $q = 0$. $q \in \Omega_{\Lambda}^0(\mathbb{Z})$ ist hier eine allgemeine ganzzahlige Funktion auf den Punkten von Λ , die konkrete Anwendung ergibt sich mit $q(\cdot) = \delta_x(\cdot) - \delta_y(\cdot)$ (d.h. $ae^{i(\varphi, q)} = \phi_x \bar{\phi}_y$) oder $q(\cdot) = \delta_x(\cdot)$ (d.h. $ae^{i(\varphi, q)} = \phi_x$). Für die erste Fouriertransformation behandle ich i) und ii) gemeinsam:

$$\begin{aligned} & Z^{-1} \int D\varphi D\varphi' e^{i(\varphi, q)} e^{-\frac{1}{2e^2} \|d\varphi + \varphi'\|^2} \delta(d^*\varphi) e^{S_H^{v,i}(\varphi, d\varphi)} \\ &= Z^{-1} e^{-\frac{1}{2e^2} (d\varphi, \Delta^{-1} d\varphi)} \int D\varphi \delta(d^*\varphi) e^{-\frac{1}{2e^2} \|d\varphi + d\Delta^{-1} d^*\varphi'\|^2} \sum_{d^*n_i = -q} e^{i(\varphi, n_i)} e^{-\frac{\|n_i\|^2}{2a^2}} \end{aligned}$$

wobei wir $\mathbb{1} = d\Delta^{-1}d^* + d^*\Delta^{-1}d$ sowie die Fourierdarstellung (2.59) benützt und nach Ausführung der φ -Integration die Zwangsbedingung $d^*n_i = -q$ erhalten haben. Das Gauß'sche A-Integral kann nun ausgeführt werden und ergibt (nach einer Umbenennung $n_i \rightarrow -n_i$)

$$Z^{-1} e^{-\frac{1}{2e^2} (d\varphi, \Delta^{-1} d\varphi)} \sum_{d^*n_i = q} e^{-\frac{1}{2} (n_i, C n_i)} e^{i(n_i, \Delta^{-1} d^*\varphi)} \quad (2.60)$$

mit

$$C = e^2 \Delta^{-1} d^* \Delta^{-1} d + a^{-2} \quad (2.61)$$

Nun gelten per Korrelationsungleichungen (siehe z.B. [Fröhlich, Park 1977; Guth 1980; Seiler 1982] für diskrete Gauß'sche Erwartungswerte die gleichen Monotonieeigenschaften in der inversen Kovarianz C wie für kontinuierliche:

Für $q = 0$ wächst $(*)$ (2.60) mit C , für $F = 0$ fällt (2.60) mit (größer werden- dem) C . Wir werden die folgenden Ungleichungen benutzen:

$$\begin{aligned} C &= (e^2 \Delta^{-1} + \alpha^{-2}) - e^2 d \Delta^{-2} d^* \\ &\leq (\beta \Delta)^{-1} - e^2 d \Delta^{-2} d^* \end{aligned} \quad (2.62a)$$

$$\begin{aligned} C &\geq e^2 (4d)^{-1} d^* \Delta^{-1} d + \alpha^{-2} \\ &= (4d\beta)^{-1} - e^2 (4d)^{-1} d \Delta^{-1} d^* \end{aligned} \quad (2.62b)$$

mit $\beta = a^2 (4d + a^2 e^2)^{-1}$. Ich betrachte zunächst den 't Hooft-Loop, d.h. $q = 0$ in (2.60), und beweise die Aussage ii).

Mit (2.62b) und unter Berücksichtigung von $d^* n_1 = 0$ erhalten wir die untere Schranke

$$\begin{aligned} Z_\Lambda^{V_i}(F) / Z_\Lambda^{V_i}(0) &\geq Z^{-1} e^{-\frac{1}{2e^2}(dF, \Delta^{-1} dF)} \sum_{d^* n_1 = 0} e^{-\frac{\|n_1\|^2}{8d\beta}} + i(n_1, \Delta^{-1} d^* F) \\ &= Z^{-1} e^{-\frac{1}{2e^2}(dF, \Delta^{-1} dF)} Z_{\Lambda, 4d\beta}^{XY}(d^* F) / Z_{\Lambda, 4d\beta}^{XY}(0) \end{aligned} \quad (2.63)$$

mit der Notation von Lemma 2.23. Der Rest des Arguments geht mit Satz 2.24 (Guths Theorem) wie zur Quasi-Herleitung von (2.53), jedoch ohne die dortigen Vorbehalte. Dies legt nahe, für den kritischen Wert $\beta_1 = \beta_c^{XY}/4d$ zu vermuten.

Für eine obere Schranke verwenden wir (2.62a) und berücksichtigen abermals $d^* n_1 = 0$

$$Z_\Lambda^{V_i}(F) / Z_\Lambda^{V_i}(0) \leq e^{-\frac{1}{2e^2}(dF, \Delta^{-1} dF)} Z^{-1} \sum_{d^* n_1 = 0} e^{-\frac{1}{2\beta}(n_1, \Delta^{-1} n_1) + i(n_1, \Delta^{-1} d^* F)}$$

Nun verwenden wir das folgende, im Anhang D bewiesene, allgemeine Lemma:

Lemma 2.31: Sei Q eine positive quadratische Form auf $\Omega_\Lambda^\nu(\mathbb{R})$ mit $Q(\text{Im} d_\Lambda) \subset \text{Ker } d_\Lambda$ und $Q(\text{Im } d_\Lambda^*) \subset \text{Ker } d_\Lambda^*$, und es sei A_Λ auf $\Omega_\Lambda^\nu(\mathbb{R})$ invertierbar. Weiter bezeichne $E_\Lambda^{\nu+1}(Z) = d_\Lambda(\Omega_\Lambda^\nu(Z))$ die Menge der Z -exakten $(\nu+1)$ -Formen und es sei $n_\nu \in \Omega_\Lambda^\nu(Z)$. Dann gilt für beliebige $h_\nu \in \Omega_\Lambda^\nu(\mathbb{C})$ und $0 \leq \nu \leq d-1$

$$\begin{aligned} &Z^{-1} \sum_{d^* n_\nu = 0} e^{i(n_\nu, h_\nu)} \exp\left[-\frac{1}{2}(n_\nu | (\Delta Q \Delta)^{-1} | n_\nu)\right] \\ &= Z^{-1} \sum_{n_{\nu+1} \in E_\Lambda^{\nu+1}(Z)} \exp\left[-\frac{1}{2}(dh_\nu + 2\pi n_{\nu+1} | d\bar{Q} d^* | dh_\nu + 2\pi n_{\nu+1})\right] \end{aligned}$$

(*) NB: Der Erwartungswert ist wegen der Symmetrie $n_i \rightarrow -n_i$ reell.

In unserem Fall gilt $\nu = 1$, $h = \Delta^{-1} d^* F$, $Q = \beta \Delta^{-1}$ und $n_2 \in E_1^2(Z) \Leftrightarrow d_1 n_2 = 0$.
Folglich

$$\begin{aligned} Z_{\Lambda}^{V_i}(\tau) / Z_{\Lambda}^{V_i}(0) &\leq e^{-\frac{e^2}{2}(d\tau, \Delta^{-1}d\tau)} Z^{-1} \sum_{d n_2 = 0} e^{-\frac{\beta}{2} \|d\Delta^{-1}d^*F + 2\pi n_2\|^2} \\ &= e^{-\frac{4d\beta}{2e^2a^2}(d\tau, \Delta^{-1}d\tau)} W_{\Lambda, \beta^{-1}}(\tau) \end{aligned}$$

mit der gleichen Notation wie in (2.46). $W_{\Lambda, \beta^{-1}}(F)$ ist aber nichts anderes als der 'Erwartungswert' des 't Hooft-Loops' im Z-Eichmodell ($a = \infty$) und fällt daher exponentiell mit $d_{\Lambda}(F)$, falls $\beta > e_c^{-2}$, der kritischen Kopplung im Z-Eichmodell. Hieraus folgt die Aussage ii) mit $\beta_2 = e_c^{-2}$.

Nun zur Frage der spontanen Symmetriebrechung, d.h. $F = 0$ in (2.60). Die obere Schranke erhalten wir sofort mit (2.62b):

$$\begin{aligned} \langle e^{i(\varphi, q)} \rangle_{\alpha=0}^{V_i} &\leq e^{\frac{e^2}{8d}(q, \Delta^{-1}q)} Z^{-1} \sum_{d^* n_1 = q} e^{-\frac{(4d\beta)^{1/2}}{2} \|n_1\|^2} \\ &= e^{\frac{e^2}{8d}(q, \Delta^{-1}q)} \langle e^{i(\varphi, q)} \rangle_{4d\beta}^{XY} \end{aligned}$$

Da $(\Delta^{-1})_{xy}$ in $d \geq 3$ endlich bleibt, folgt die Abwesenheit spontaner Symmetriebrechung für $\beta < \beta_c^{XY}/4d$, d.h. dieser Teil der Aussage i) gilt per definitionem für $\beta_1 = \beta_c^{XY}$.

Für eine untere Schranke formen wir (2.60) zunächst um. Wir verwenden $C d \Delta^{-1} d^* = a^{-2} d \Delta^{-1} d^*$ und erhalten

$$\begin{aligned} \langle e^{i(\varphi, q)} \rangle_{\alpha=0}^{V_i} &= e^{-\frac{1}{2a^2}(q, \Delta^{-1}q)} Z^{-1} \sum_{d^* n_1 = q} e^{-\frac{1}{2}(n_1, C d \Delta^{-1} d^* n_1)} \\ &\geq e^{-\frac{1}{2a^2}(q, \Delta^{-1}q)} Z^{-1} \sum_{d^* n_1 = q} e^{-\frac{1}{2\beta}(n_1, d^* \Delta^{-2} d n_1)} \end{aligned} \quad (2.64)$$

wobei die Ungleichung mit (2.62a) folgt. Nun wählen wir uns eine spezielle Lösung^(*) $j \in \Omega_{\Lambda}^1(Z)$ mit $d^* j = q$ und ersetzen n_1 durch $m_1 + j$ mit $d^* m_1 = 0$.

(*) Für $q(\cdot) = \delta_x(\cdot) - \delta_y(\cdot)$ können wir für j beispielsweise eine 'Linie' von y nach x wählen, und für $q = \delta_x(\cdot)$ eine 'Linie' vom Rand $\partial \mathcal{M}$ zum Punkt x .

Da der Exponent aber nur von $d(m_1 + j)$ abhängt, dürfen wir j auch durch $d^* \Delta^{-1} d$ ersetzen. Dies ergibt

$$\begin{aligned}
 &= e^{-\frac{1}{2\alpha^2}(q, \Delta^{-1}q)} Z^{-1} \sum_{d^* m_1=0} e^{-\frac{1}{2\beta}(m_1 + d^* \Delta^{-1} d j | d^* \Delta^{-2} d | m_1 + d^* \Delta^{-1} d j)} \\
 &= e^{-\frac{1}{2\alpha^2}(q, \Delta^{-1}q)} Z^{-1} \sum_{d n_{\nu+1}=0} e^{-\frac{1}{2\beta}(n_{\nu+1} + d \Delta^{-1} d^* j^* | d \Delta^{-1} d^* | n_{\nu+1} + d \Delta^{-1} d^* j^*)}
 \end{aligned}$$

wobei wir in der letzten Gleichung die Summe auf das duale Gitter übertragen haben, d.h. $\nu + 1 = d - 1$. Nun können wir wieder Lemma 2.31 anwenden, diesmal in der umgekehrten Richtung, mit $Q = (4\pi^2 \beta \Delta^2)^{-1}$ und $h_\nu = 2\pi \Delta^{-1} d^* j^*$. Wir erhalten schließlich

$$\langle e^{i(\varphi, q)} \rangle_{\alpha=0}^{\nu} \geq e^{-\frac{1}{2\alpha^2}(q, \Delta^{-1}q)} Z^{-1} \sum_{d^* n_\nu=0} e^{-\frac{4\pi^2}{2} \beta \|n_\nu\|^2 + 2\pi i (n_\nu, \Delta^{-1} d^* j^*)} \quad (2.65)$$

mit $\nu = d - 2$. In $d = 3$ (also $\nu = 1$) ist dies eine Summe wie in (2.63), und wir können für β_2 groß genug und $\beta > \beta_2$ abermals Satz 2.24 (Guths Theorem) anwenden:

$$\begin{aligned}
 &\geq e^{-\frac{1}{2\alpha^2}(q, \Delta^{-1}q)} \exp[-c_\nu e^{-\frac{4\pi^2 \beta}{2}} 4\pi^2 \inf_{n_{\nu+1}} \|d \Delta^{-1} d^* j^* + n_{\nu+1}\|^2] \\
 &\geq e^{-\frac{1}{2\alpha^2}(q, \Delta^{-1}q)} \exp[-4\pi^2 c_\nu e^{-2\pi^2 \beta} (q, \Delta^{-1}q)] \quad (2.66)
 \end{aligned}$$

wobei die letzte Schranke für $n_{\nu+1} = -j^*$ folgt. Dieser Ausdruck bleibt jedoch positiv nach unten beschränkt, da $(q, \Delta^{-1}q)$ in $d \geq 3$ wie gehabt endlich bleibt. Für $d \geq 4$ beachte man, daß die Technik des Guth'schen Beweises von Satz 2.24 ohne Schwierigkeiten auf die dualen Modelle (2.65) für allgemeine ν mit $1 \leq \nu \leq d - 1$ und $d \geq 2$ übertragbar ist (s. Diskussion von Satz 2.24 im Anhang D). Man erhält die gleichen Schranken wie in (2.66), mit dimensionsabhängigen Konstanten c_ν , und die Behauptung folgt wie in $d = 3$. Abschließend sei erwähnt, daß dies im Spezialfall $e^2 = 0$ ein Beweis zur spontanen Symmetriebrechung im XY-Modell mit Villain-Wirkung für $d \geq 3$ ist, wie er bereits in [Seiler 1982] vorgeschlagen wurde. 

Zusammenfassend möchte ich noch einmal die Vermutungen über die optimalen Schranken β_1 und β_2 formulieren und begründen. Falls wir β_c^{XY} als den kritischen Wert für spontane Symmetriebrechung im XY-Modell definieren und e_c^{-2} als den kritischen Wert im Z-Eichmodell ($a^2 = \infty$), bei dem das 'Area-Law' für den 't Hooft-Loop zusammenbricht (bzw. die auf $\mathcal{A}(F)$ basierende Verallgemeinerung für beliebige $d \geq 3$), so gilt die Aussage i) des Theorems definitiv mit $\beta_1 = \beta_c^{XY}$ und die Aussage ii) mit $\beta_2 = e_c^{-2}$. Für die jeweiligen umgekehrten Schranken kann dies nicht mit hundertprozentiger Sicherheit behauptet werden. Zwar wird niemand bezweifeln, daß die Ordnungsparameter (2.63/65) der entsprechenden dualen Modelle in irgendeiner Weise ebenfalls auf die Phasenübergänge reagieren, aber ob die aus dem Guth'schen Satz folgenden unteren Schranken ($\sim \exp - \inf_{h_\nu} \|dh_\nu + 2\pi n_{\nu+1}\|^2$) für beliebige h_ν tatsächlich bis zum kritischen Punkt gültig sind, ist unbekannt (in (2.63) war $h_\nu = \Delta^{-1} d^* F$, in (2.65) $h_\nu = 2\pi \Delta^{-1} d^* j^*$). Hinzuzufügen bleibt, daß (2.65) nichts anderes ist, als ein verallgemeinerter Wilson-Loop im Z-Eichmodell. In der Tat, wenn wir wieder auf das ursprüngliche Gitter zurückübersetzen, erhalten wir für die Summe in (2.65)

$$\begin{aligned} & Z^{-1} \sum_{dn_i=0} e^{2\pi i (n_i, \Delta^{-1} d_j)} e^{-\frac{\beta}{2} \|2\pi n_i\|^2} \\ &= Z^{-1} \sum_{[n_i]} e^{i (2\pi n_i, d^* \Delta^{-1} d_j)} e^{-\frac{\beta}{2} \|2\pi n_i\|^2} \end{aligned}$$

wobei die letzte Summe über Eichäquivalenzklassen $[n_i]$ mit $dn_i = n_2$ geht. Als kritische Kopplung würde sich also ebenfalls $\beta_2 = e_c^{-2}$ aufdrängen^(*).

(*) Die Tatsache, daß in $d = 4$ der Wilson-Loop im Z-Eichmodell (bzw. allgemeiner im nicht-kompakten Higgsmodell) bei beliebigen Kopplungskonstanten höchstens exponentiell mit dem Umfang abfällt [Brydges, Fröhlich, Seiler 1979 b], steht nicht im Widerspruch, da wir hier eine 'ausgeschmierte' Stromverteilung $d \Delta^{-1} d j$ vorliegen haben. Der in dieser Weise verallgemeinerte Wilson-loop zeigt den Phasenübergang tatsächlich an, da der Erwartungswert für $\beta < \beta_c^{XY}$ nach (2.65) verschwindet, wenn wir die Endpunkte des Strings j unendlich weit auseinander ziehen, während dies nach (2.66) für $\beta > \beta_2 (\geq e_c^{-2})$ nicht der Fall ist. Der Frage, ob dies auch im allgemeinen Higgsmodell ($a^2 < \infty$) gilt, bin ich hier nicht mehr nachgegangen.

Ich will diese Überlegungen in einem Korollar zusammenfassen, wobei ich sicherheitshalber auch die Möglichkeit offenlasse, daß durch das Abfallverhalten von $Z(F) / Z(0)$ und durch den Erwartungswert $\langle \Phi \rangle$ verschiedene Phasentrennlinien definiert werden.

Korollar 2.32: Es seien $e_{SSB}^2(a^{-2})$ bzw. $e_{tH}^2(a^{-2})$ die Phasentrennlinien im Modell (2.58) für spontane Symmetriebrechung bzw. "Area-Law" des 'tHooft-Loops, d.h.

$$e_{SSB}^2 = \inf \{ e^2 \geq 0 \mid \langle \Phi \rangle_{\text{Lan}}^{V_i} = 0 \}$$

$$e_{tH}^2 = \inf \{ e^2 \geq 0 \mid m_{tH}(e^2, a^{-2}) = 0 \}$$

wobei

$$m_{tH}(e^2, a^{-2}) := \sup \{ m \geq 0 \mid [Z(F) / Z(0)]^{V_i} \leq e^{-m A(F)}, \forall F \}$$

Dann gilt in $d \geq 3$:

- i) e_{tH}^2 und e_{SSB}^2 sind monoton fallende und Lipschitz-stetige Funktionen von a^{-2} , mit der Lipschitzkonstanten 4 d.
- ii) $e_{SSB}^2(a^{-2}) \leq 4 d [(\beta_c^{XY})^{-1} - a^{-2}]$
- iii) $e_c^2 - 4 d a^{-2} \leq e_{tH}^2(a^{-2}) \leq e_c^2$

wobei e_c^2 und β_c^{XY} durch $e_{tH}^2(0) = e_c^2$ und $e_{SSB}^2((\beta_c^{XY})^{-1}) = 0$ definiert sind.

Bemerkung:

Man vermutet selbstverständlich $e_{SSB}^2(a^{-2}) = e_{tH}^2(a^{-2})$. Man beachte, daß bereits die Annahme

$$e_{tH}^2(a^{-2}) \leq e_{SSB}^2(a^{-2}) \quad (2.67)$$

(d.h. nicht-gleichzeitiges Auftreten von $\langle \Phi \rangle_{\alpha=0}^{V_i} = 0$ und 'Confinement' von Monopolen) eine Schranke

$$e_c^2 \leq 4 d (\beta_c^{XY})^{-1}$$

impliziert. In $d = 3$ ist das Z-Eichmodell dual zum Villain-XY-Modell, also $e_c^2(d = 3) = 4 \pi^2 \beta_c^{XY}(d = 3)$, und in $d = 4$ dual zum Villain-Polyakov

U(1)-Eichmodell, also $e_c^2(d=4) = 4\pi^2 \beta_c^{U(1)}(d=4)$. Unter der Annahme (2.67) erhält man also zusätzlich folgende Schranken, die meines Wissens neu sind

$$\beta_c^{XY} \leq \sqrt{3}/\pi \approx 0.55 \quad \text{in } d=3$$

$$\beta_c^{XY} \leq 4(\pi^2 \beta_c^{U(1)})^{-1} \quad \text{in } d=4$$

(Die Monte-Carlo Daten von [Dasgupta, Halperin 1981] liefern in $d=3$ $\beta_c^{XY} = 0.33$. Eine entsprechende Untersuchung in $d=4$ konnte ich nicht finden. Die Monte-Carlo Simulationen des reinen U(1)-Eichmodells mit Villain-Polyakov-Wirkung von [De Grand, Toussaint 1980] liefern $\beta_c^{U(1)} = 0.63$, so daß hieraus in $d=4$ $\beta_c^{XY} \leq 0.64$ folgen würde).

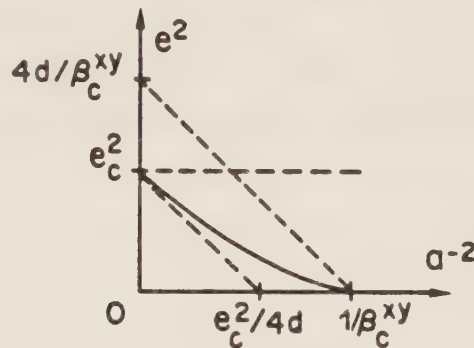


Fig. 6: Die Schranken an die Phasentrennlinie unter der Annahme $e_{SSB}^2(a^{-2}) = e_{tH}^2(a^{-2})$.

Beweis von Korollar 2.32:

Die Aussagen ii) und iii) folgen nach Definition von e_c^2 und β_c^{XY} automatisch aus i). Die Behauptung i) ergibt sich wegen $(q, \Delta^{-1}q) < \infty$ sofort aus den folgenden Ungleichungen (s. Fig. 7): Sei

$$e_1^2 - e_2^2 \leq 4d(q_2^{-2} - q_1^{-2}) \leq 0 \quad (2.68)$$

Dann gilt:

$$i) \quad e^{\frac{1}{2q_1^2}(q, \Delta^{-1}q)} < e^{\frac{1}{2q_2^2}(q, \Delta^{-1}q)} \geq_{1, \alpha=0}^{v_i} \geq e^{\frac{1}{2q_2^2}(q, \Delta^{-1}q)} < e^{\frac{1}{2q_1^2}(q, \Delta^{-1}q)} \geq_{2, \alpha=0}^{v_i} \quad (2-69a)$$

$$\text{ii)} \quad [Z(\tau)/Z(0)]_1^{V_i} \leq [Z(\tau)/Z(0)]_2^{V_i} \quad (2.69b)$$

wobei die Indizierung durch 1,2 sich auf die Parameterwerte $e_i^2, a_i^2, i = 1,2$ bezieht. Die Abschätzungen (2.69) folgen aus den Darstellungen (2.64) bzw. (2.60) und der Tatsache, daß unter der Bedingung (2.68) gilt

$$\begin{aligned} e_1^2 \Delta^{-1} + \alpha_1^{-2} &\leq e_2^2 \Delta^{-1} + \alpha_2^{-2} \\ \text{sowie} \quad e^{-\frac{1}{2e_1^2}(d\tau, \Delta^{-1}d\tau)} &\leq e^{-\frac{1}{2e_2^2}(d\tau, \Delta^{-1}d\tau)} \end{aligned}$$

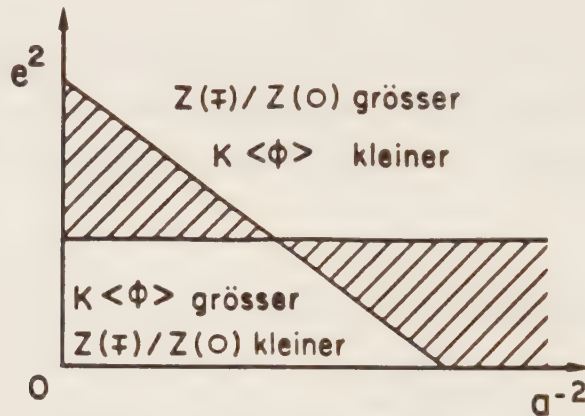


Fig. 7: Die Ungleichungen (2.69) bezogen auf einen festen Referenzpunkt in der (e^2, a^{-2}) -Ebene. Die Steigung der Schrägen ist $-4d$ und $K := a^{-1} \exp(\frac{1}{2a^2} \Delta^{-1} d\tau, d\tau)$. Falls der Referenzpunkt auf den Phasentrennlinien e_{ssB}^2 oder e_{tH}^2 liegt, müssen diese im schraffierten Bereich verlaufen.

Hiermit möchte ich die Untersuchungen zum Verlauf der Phasentrennlinie bei Temperatur $T = 0$ (unendliche Länge in euklidischer Zeitrichtung) abschließen und mich der Frage zuwenden, welche der Methoden sich in $d = 4$ auch auf beliebig hohe Temperaturen $T > 0$ und in diesem Zusammenhang auf den Limes kontinuierlichen euklidischer Zeit übertragen lassen. Die Antwort ist leider fast vollständig negativ. Der Grund ist, daß bei einer Skalierung des Gitters mit Gitterkonstanten ε_μ in Richtung μ die "Ableitungen" d, d^* und Δ durch entsprechend skalierte Versionen zu ersetzen sind und alle l^2 -Skalarprodukte mit dem Volumenmaß

$$\varepsilon^d := \prod_{\mu=1}^d \varepsilon_\mu \quad (2.70)$$

versehen werden. Insbesondere genügt auch der skalierte Laplace-de Rham Operator Δ_ε nur noch der Schranke

$$0 \leq \Delta_\varepsilon \leq 4 \sum_{\mu=1}^d \varepsilon_\mu^{-2} \quad (2.71)$$

In den vorausgegangenen Abschätzungen muß also überall der Faktor $4d$ durch diese obere Schranke ersetzt werden, die im Limes $\varepsilon_0 \rightarrow 0$ klarerweise divergiert. Des weiteren können selbstverständlich auch die Aktivitäten der verschiedenen Clusterentwicklungen nicht gleichmäßig in ε_μ abgeschätzt werden. Es ist daher im Prinzip nicht bekannt, ob im Limes kontinuierlicher euklidischer Zeit (der einer kanonischen Quantisierung des Systems über einem diskreten Raum entspricht) die Higgsphase überhaupt existiert. Da jedoch sowohl das vierdimensionale XY-Modell, als auch das zum Z-Eichmodell duale $U(1)$ -Eichmodell ihren Phasenübergang auch im Zeitkontinuumlimes beibehalten^(*), ist es nicht ganz abwegig, gleiches auch für das "interpolierende" nichtkompakte Higgsmodell zu vermuten. Für das folgende werde ich jedoch lediglich $\varepsilon_0 > 0$ klein genug wählen (und $\varepsilon_i = 1$, $i = 1, 2, 3$ beibehalten), so daß beispielsweise das Phasendiagramm in Fig. 6 qualitativ immer noch richtig ist, lediglich die Steigung $(-4d)$ der angegebenen Schranken ist zu ersetzen durch $-d(3 + \varepsilon_0^{-2})$. Was gleich bleibt, ist die Aussage, daß die Phasentrennlinie $e_{tH}^2(a^{-2})$ monoton fällt, d.h. daß das System für $e^2 > e_c^2$ sich in jedem Fall in der Coulombphase befindet. Nach Theorem 2.28 i) gilt dies auch für Modelle mit variabler Länge $|\Phi|$ des Higgsfelds. Um also einen Phasenübergang zur Coulombphase bei hoher Temperatur nachzuweisen, genügt es, das Z-Eichmodell zu betrachten. Hierzu werde ich eine Verallgemeinerung des 't Hooft-Loops benutzen, die dual zum Polyakov-Loop der $U(1)$ -Eichtheorie ist, um dann die Ergebnisse von [Borgs, Seiler 1983] anzuwenden. Neu hierbei ist die Verallgemeinerung der Dualitätstransformation auf unsymmetrische Gitterkonstanten ε_μ .

Wir benötigen zunächst einen Skalierungsoperator $S_\varepsilon : \Omega_\Lambda^\nu \rightarrow \Omega_\Lambda^\nu$, der die ν -Formen (aufgefaßt als ν -dimensionale Integrationsmaße) richtig skaliert:

$$(\xi \psi)_{\mu_1, \dots, \mu_\nu} := \varepsilon_{\mu_1} \dots \varepsilon_{\mu_\nu} \psi_{\mu_1, \dots, \mu_\nu} \quad (2.72)$$

Hiermit können wir skalierte Ableitungen definieren, wie bereits in den Fußnoten zu (1.17) und (1.22) angedeutet:

(*) Eine auch im Zeitkontinuumlimes konvergente Clusterentwicklung für die 'massiven' Phasen wird in [Borgs 1986] gerade vorbereitet. Für die Existenz der Deconfinement-Phase zumindest bei positiver Temperatur im $U(1)$ -Eichmodell siehe [Borgs, Seiler 1983]. Die dort verwendeten 'Infrarot-Schranken' von [Fröhlich, Simon, Spencer 1976] sollten ähnliches auch für das XY-Modell leisten [Seiler, private Mitteilung].

$$d_{\mathcal{E}} := S_{\mathcal{E}}^{-1} \cdot d \cdot S_{\mathcal{E}} \quad (2.73a)$$

$$d_{\mathcal{E}}^* := S_{\mathcal{E}} \cdot d^* \cdot S_{\mathcal{E}}^{-1} \quad (2.73b)$$

Das skalierte Skalarprodukt auf den $\mathcal{V}$ -Formen lautet

$$(\cdot, \cdot)_{\mathcal{E}} := \varepsilon^d (\cdot, \cdot)$$

wobei ε^d in (2.70) definiert wurde. Hiermit gilt $S_{\mathcal{E}} = S_{\mathcal{E}}^*$, d.h. $d_{\mathcal{E}}$ und $d_{\mathcal{E}}^*$ sind nach wie vor dual zueinander. Die skalierte kovariante Ableitung schreibt sich nun als (*)

$$d_{A, \mathcal{E}} := S_{\mathcal{E}}^{-1} d(S_{\mathcal{E}} A) S_{\mathcal{E}} \quad (2.74)$$

Wenn wir schließlich noch $\sum_x V(\Phi_x)$ ersetzen durch $\varepsilon^d \sum_x V(\Phi_x)$ haben wir alle Terme der ursprünglichen Wirkung auf das skalierte Gitter umdefiniert. Es gilt nach wie vor $d_{\mathcal{E}}^2 = 0$, $d_{\mathcal{E}}^{*2} = 0$, $\Delta_{\mathcal{E}} := d_{\mathcal{E}} d_{\mathcal{E}}^* + d_{\mathcal{E}}^* d_{\mathcal{E}}$ und Eichtransformationen sind gegeben durch dimensionslose skalare Funktionen $\chi \in \Omega_{\Lambda}^{\mathcal{V}}$ gemäß

$$(A, \Phi) \mapsto (A - d_{\mathcal{E}} \chi, e^{i\chi} \Phi)$$

Ausgehend von (2.74) überlegt man sich leicht, wie die Higgskopplung im Modell mit eingefrorener Länge auszusehen hat:

$$\varepsilon^d \sum_{x, \mu} \alpha_{\mu}^2 \cos(\varepsilon_{\mu} (H + d_{\mathcal{E}} f)_{\mu}(x)) \quad (2.75)$$

wobei

$$\alpha_{\mu} := \frac{a}{\varepsilon_{\mu}}$$

Im Z-Eichmodell ($a \rightarrow \infty$) sind die Eichfelder also jetzt (modulo Eichtransformationen) eingefroren auf diskrete Konfigurationen

$$2\pi n_i \in S_{\mathcal{E}}^{-1} \Omega_{\Lambda}^1(2\pi \mathbb{Z})$$

Folglich ist $d_{\mathcal{E}} n_i \in S_{\mathcal{E}}^{-1} \Omega_{\Lambda}^2(\mathbb{Z})$, und wir erhalten daher für die Zustandssumme im äußeren elektromagnetischen Feld F

$$Z_{\Lambda}(F) = \sum_{\substack{n_2 \in S_{\mathcal{E}}^{-1} \Omega_{\Lambda}^2(\mathbb{Z}) \\ d_{\mathcal{E}} n_2 = 0}} \exp \left[-\frac{4\pi^2}{2e^2} \left(n_2 + \frac{F}{2\pi}, n_2 + \frac{F}{2\pi} \right)_{\mathcal{E}} \right] \quad (2.76)$$

(*) Man beachte, daß für 0-Formen $S_{\mathcal{E}} \phi = \phi$ gilt.

Die Aufgabe besteht nun darin, dies als eine geeignet skalierte Summe auf das duale Gitter umzuschreiben. Hierzu beachte man, daß bezüglich der kanonischen Abbildung $*$: $\Omega_\Lambda^\nu \rightarrow \Omega_{\Lambda^*}^{d-\nu}$, $\psi \mapsto \psi^*$ gilt:

$$(S_\varepsilon \psi)^* = \varepsilon^d S_\varepsilon^{-1} \psi^*$$

und daher

$$n_\nu \in S_\varepsilon^{-1} \Omega_\Lambda^\nu(\mathbb{Z}) \iff n_\nu^* \in S_\varepsilon \Omega_{\Lambda^*}^{d-\nu}(\varepsilon^{-d} \mathbb{Z})$$

sowie

$$(d_\varepsilon n_\nu)^* = d_\varepsilon^* n_\nu^*$$

Folglich

$$Z_\Lambda(\overline{F}) = \sum_{\substack{n_2 \in S_\varepsilon \Omega_{\Lambda^*}^2(\mathbb{Z}) \\ d_\varepsilon^* n_2 = 0}} \exp \left[-\frac{(2\pi/\varepsilon^d)^2}{2\varepsilon^2} (n_2 + \frac{\varepsilon^d}{2\pi} \overline{F}^*, n_2 + \frac{\varepsilon^d}{2\pi} \overline{F}^*)_\varepsilon \right]$$

Um dies als einen (unnormierten) Erwartungswert im U(1)-Eichmodell auf Λ^* schreiben zu können, müssen wir $(\varepsilon^d/2\pi) \overline{F}^* \in S_\varepsilon \Omega_{\Lambda^*}^2(\mathbb{Z})$ verlangen, d.h.

$$\overline{F} \in S_\varepsilon^{-1} \Omega_\Lambda^2(2\pi \mathbb{Z})$$

Hiermit können wir $m_2 = -(n_2 + (\varepsilon^d/2\pi) \overline{F}^*) \in S_\varepsilon \Omega_{\Lambda^*}^2(\mathbb{Z})$ setzen und die Summe umschreiben in eine Summe über m_2 mit $d_\varepsilon^* m_2 = -S_\varepsilon \overline{j}$, wobei (*)

$$\overline{j} := (d S_\varepsilon \overline{F})^* / 2\pi \in \Omega_{\Lambda^*}^1(\mathbb{Z}) \quad (2.77)$$

Dies führt schließlich zu

$$Z_\Lambda(\overline{F}) = \int_{\Lambda^*} \overline{A} e^{i(\overline{A}, \overline{j})} \sum_{m_2 \in S_\varepsilon \Omega_{\Lambda^*}^2(\mathbb{Z})} e^{i(\overline{A}, S_\varepsilon^{-1} d_\varepsilon^* m_2) - \frac{4\pi^2}{2\varepsilon^2 \varepsilon^d} \|m_2\|^2}$$

wobei jetzt nur noch unskalierte Skalarprodukte auftauchen. $\int_{\Lambda^*} \overline{A}$ ist das Produkt über alle $b \in \Lambda^*$ von normierten Haarmaßen auf U(1), und das Integral verschwindet daher nur dann nicht, wenn $\overline{j} + S_\varepsilon^{-1} d_\varepsilon^* m_2 = 0$. Nun schreiben wir $m_2 = S_\varepsilon k_2$ mit $k_2 \in \Omega_{\Lambda^*}^2(\mathbb{Z})$. Wegen $(\overline{A}, S_\varepsilon^{-1} d_\varepsilon^* m_2) = (d\overline{A}, k_2)$ können wir nun die Poisson-Summationsformel in gewohnter Weise anwenden (vgl.

Beweis zu Lemma 2.22) und erhalten mit $\beta = e^2 / 4\pi^2$

$$Z_\Lambda(\overline{F}) / Z_\Lambda(0) = Z_\Lambda^{-1} \int_{\Lambda^*} \overline{A} e^{i(\overline{A}, \overline{j})} \sum_{k_2 \in \Omega_{\Lambda^*}^2(\mathbb{Z})} e^{-\frac{\beta}{2} \varepsilon^d \|S_\varepsilon^{-1} (d\overline{A} + 2\pi k_2)\|^2} \quad (2.78)$$

(*) Man beachte, daß $d_\varepsilon^* S_\varepsilon \Omega_\Lambda^\nu(\mathbb{Z}) \subset S_\varepsilon \Omega_{\Lambda^*}^{\nu-1}(\mathbb{Z})$.

Dies ist genau der Erwartungswert eines verallgemeinerten Wilson-Loops $e^{i(A,j)}$ (NB : $d^* j = 0$) im $U(1)$ -Eichmodell mit Gitterkonstanten ε_μ und entsprechend skaliertem Villain-Polyakov-Wirkung.

Nun beachten wir, daß bei positiver Temperatur periodische Randbedingungen in Zeitrichtung zu wählen sind (in Raumrichtung wählen wir Λ nach wie vor offen) und nehmen für j zwei gegenläufige Polyakov-Loops [Polyakov, 1978] im Abstand x . Konkret sei der Wert für j auf den positiv orientierten Bonds der x_0 -Achse gleich $+1$, auf denen der um x in der $x_2 x_1$ -Ebene verschobenen Achse gleich -1 und Null sonst.^(*) Die beiden Linien, auf denen j nicht verschwindet, sind wegen der periodischen Randbedingungen in Zeitrichtung geschlossen ('Loops'). Wir wählen eine 2-Form $f \in \Omega_\Lambda^2(Z)$, indem wir $f = +1$ setzen auf den Plaketten der $x_0 x_1$ -Ebene, die zwischen den beiden Polyakov-Loops liegen, und $f = 0$ sonst.^(*) Dies liefert $d_\Lambda^* f = j$ und daher (2.77) mit

$$F = 2\pi S_\varepsilon^{-1} f^*$$

Zu einer festen Zeitschicht sieht der Träger von f^* aus wie in Fig. 4 (vor Theorem 2.28) skizziert, d.h. er besteht aus einem Stapel von Plaketten parallel zur $x_2 x_3$ -Ebene in Λ . Da wir $\varepsilon_i = 1$, $i = 1, 2, 3$ vereinbart haben, hat F auf diesen Plaketten den Wert 2π und Null sonst.^(*) Sei nun $T = (\varepsilon_0 L_0)^{-1}$ die Temperatur unseres Systems, wobei L_0 die Anzahl der Gitterpunkte in Zeitrichtung bezeichnet. Dann ist

$$V_{\varepsilon_0}(x, T, \beta) := -\frac{1}{T} \lim_{\Lambda \uparrow \varepsilon_0 L_0 x Z^{d-1}} \log [Z_\Lambda(T) / Z_\Lambda(0)] \quad (2.79)$$

die freie Energie eines äußeren Quark-Antiquark Paares im räumlichen Abstand x (genauer an den Punkten $\vec{r}_q = (0, 0, 0)$ und $\vec{r}_{\bar{q}} = (x, 0, 0)$) für das $U(1)$ -Eichmodell (2.78) bei Temperatur T und Gitterkonstanten ε_μ mit $\varepsilon_i = 1$, $i = 1, 2, 3$ [Polyakov 1978]. Alternativ kann (2.79) auch als freie Energie eines äußeren Monopol-Antimonopol Paares im Z -Eichmodell (2.76) aufgefaßt werden (die frühere Kritik greift hier nicht mehr, da sowieso nur noch ganzzahlige Eichfelder zugelassen sind). Je nachdem, von welchem Modell wir sprechen, definieren wir die Confinement bzw. Higgsphase durch

(*) Auf den entsprechend negativ orientierten Bonds bzw. Plaketten selbstverständlich den entsprechend negativen Wert.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} V_{\epsilon_0}(x, T, \beta) > 0 \quad (2.80a)$$

(dies entspricht dem 'Area-Law' für $Z(F) / Z(0)$) und die Deconfinement- bzw. Coulombphase durch

$$\lim_{x \rightarrow \infty} V_{\epsilon_0}(x, T, \beta) < \infty \quad (2.80b)$$

(dies entspricht dem 'Perimeter-Law' für $Z(F) / Z(0)$). Wir erhalten daher

Theorem 2.33: Das Z-Eichmodell (2.76) ist in $d = 4$ mit $\epsilon_i = 1$, $i = 1, 2, 3$

- i) in der Higgsphase, falls $e^2 < \frac{8}{11} \pi^2 \epsilon_0$.
- ii) in der Coulombphase, falls $e^2 > 2\pi^2 T^{-1} [\ln(1 + \frac{1}{3I(3)})]^{-1}$, wobei

$$I(n) = (2\pi)^{-n} \int_{-\pi}^{\pi} d^n k \sum_{i=1}^n (1 - \cos k_i)^{-1}$$

Beweis:

Folgt sofort aus den entsprechenden Schranken für das $U(1)$ -Eichmodell von [Borgs, Seiler 1983] (*).

Bemerkungen:

i) Wie bereits erwähnt, gilt die untere Schranke für die Coulombphase wegen der Korrelationsungleichung in Theorem 2.28i) auch für das allgemeine Higgsmodell bei beliebigen λ und v^2 .

ii) Für das Modell mit eingefrorener Länge und Wirkung (2.58) erhält man durch Verallgemeinerung von Lemma 2.31 auf skalierte Gitter als obere Schranke für die Higgsphase

$$e^2 < \pi^2 \epsilon_0 \frac{8}{11} - 3(3 + \epsilon_0^{-2}) a^{-2}$$

iii) Die Wahl von Λ als offenen Komplex in Raumrichtung ist bei periodischen Randbedingungen in Zeitrichtung wichtig. Erstens gibt es sonst harmonische

(*) Genaugenommen ist die Confinement-Schranke, aus der i) folgt, nur für das $U(1)$ -Modell mit Wilson Wirkung gezeigt. Sie gilt jedoch qualitativ genauso für die Villain-Polyakov Wirkung (2.78).

1-Formen (nämlich $A_0 = \text{const.}$, $A_1 = 0$), die man durch eine entsprechende δ -Funktion verbieten müßte. Zweitens, und das ist gravierender, wäre sonst. auch die zweite Kohomologie nicht trivial, d.h. $d_\wedge \eta_2 = 0$ wäre nicht äquivalent zu $\eta_2 = d_\wedge \eta_1$, und das Z-Eichmodell daher nicht dual zum U(1)-Eichmodell.

- iv) In [Borgs, Seiler 1983] wurden periodische Randbedingungen auch in Raumrichtung verwendet, um erstens Translationsinvarianz bereits im endlichen Volumen zu gewährleisten, und zweitens einen verschwindenden Erwartungswert für einen einzelnen Polyakov-Loop zu erhalten. Hier erhalten wir $\wedge^*$ als abgeschlossenen Komplex in Raumrichtung, so daß wegen der daraus folgenden Symmetrie $A \mapsto A + \text{const.}$ der Erwartungswert eines einzelnen Polyakov-Loops ebenso verschwindet. Die Translationsinvarianz ist nur im thermodynamischen Limes notwendig und folgt dann aus Korrelationsungleichungen (d.h. Monotonie in $\wedge$).

Hiermit ist gezeigt, daß wir zu jedem $e^2 > 0$ eine Temperatur $T = (\epsilon_0 L_0)^{-1}$ finden können (wegen $L_0 > 1$ müssen wir notfalls ϵ_0 klein genug wählen), oberhalb derer nach dem 't Hooft-Loop-Kriterium (2.80) unabhängig vom Higgspotential kein Higgsmechanismus mehr auftritt. Leider sind die Schranken nicht gut genug, um gleichzeitig die Existenz der Higgsphase für gleiches e^2 bei tiefen Temperaturen zu garantieren. Eventuell führen die Methoden von [Borgs 1986] einen Schritt weiter in diese Richtung.

2.6 Zusammenfassung und Ausblicke für das nicht-kompakte Modell

In diesem Kapitel wurde eine relativ vollständige Abhandlung über die Phasenstruktur des nicht-kompakten abelschen Higgsmodells gegeben, jedenfalls soweit es den Vakuumsektor der Theorie betrifft. Es wurde gezeigt, daß der Erwartungswert von ϕ_x nur in Landau-Eichung ein vernünftiger Ordnungsparameter ist. In Landau-Eichung läßt sich dieser Operator identifizieren mit dem eichinvarianten Ausdruck $\phi_x e^{i(A^L, j)}$, wobei j ein beliebiger "String" vom Punkt x ins Unendliche ist und $A^L = d\bar{\Delta}^{-1}d^*A$ den longitudinalen Anteil des Vektorpotentials A bezeichnet. Mit Hilfe der Methoden von [Kennedy, King 1986] konnte gezeigt werden, daß in der Higgsphase $\langle \phi_x \rangle_{\text{Landau}} \neq 0$ gilt, wogegen der Erwartungswert in der Coulombphase verschwindet. In diesem Zusammenhang konnte die Existenz der Coulombphase über den von [Brydges, Seiler 1986] gezeigten Bereich hinaus auch für große e^2 bei beliebigem Higgspotential bewiesen werden. Umgekehrt wurden die Ergebnisse zur Higgsphase von [Balaban et al. 1984] erweitert durch eine entsprechende Untersuchung im Modell mit eingefrorener Länge $|\phi| = a$ des Higgsfelds. Als ein neuartiges Ergebnis ergab sich hierbei auch der Nachweis des Meissner-Effekts und der magnetischen Flußquantisierung in der Higgsphase. Weiter wurde die freie Energie einer einzelnen Vortexlinie ("Vortex-Blatt" oder "Hooft-Loop" in $d = 4$) als ein geeigneter Unordnungsparameter zur Unterscheidung der beiden Phasen herangezogen. In der Higgsphase steigt diese Energie linear mit der Länge des Vortex an, in der Coulombphase bleibt sie beschränkt. Basierend sowohl auf diesem Kriterium als auch auf dem Erwartungswert von ϕ konnten dann in einem leicht variierten Modell neue und relativ enge Schranken an den Verlauf der Phasentrennlinie hergeleitet werden. Schließlich wurde die Dualitätstransformation zwischen dem 4-dimensionalen $U(1)$ -Eichmodell mit Villain-Polyakov Wirkung und dem 4-dimensionalen Z -Eichmodell (als Limes $|\phi| \rightarrow \infty$ des nichtkompakten Higgsmodells mit eingefrorener Länge) auf unsymmetrische Gitterkonstanten verallgemeinert, so daß sie nun auch im Zeitkontinuuumlimit gültig bleibt. Hierdurch wurde es möglich, die Deconfinement-Aussagen für positive (feldtheoretische) Temperatur im reinen $U(1)$ -Eichmodell von [Borgs, Seiler 1983] auf das nichtkompakte Higgsmodell geeignet zu übersetzen. Es folgt, daß zu jedem $e^2 > 0$ eine Temperatur $T_c(e^2) > 0$ existiert, oberhalb derer - basierend auf dem 't Hooft-Loop - keine Higgsphase mehr

existiert^{*)}. Dies ist unabhängig von den Parametern im Higgspotential und unterstützt die Annahme, daß jeder Zustand aus der Higgsphase durch Aufheizen einen Phasenübergang zur Coulombphase durchläuft. In neueren kosmologischen Theorien spielen Spekulationen über ähnliche Vorgänge in großen vereinheitlichten Feldtheorien (GUT = "Grand unified theories") unter dem Namen "inflationäres Universum" eine zentrale Rolle (für einen Überblick siehe z.B. [Brandenberger 1985]).

Als eine weitere Aufgabe für die Zukunft würde sich in diesem Zusammenhang natürlich umgekehrt der Nachweis der Higgsphase auch im Zeitkontinuumlimes stellen. Unter Umständen lassen sich die Methoden von [Borgs 1986] für diese Zwecke erweitern. Zunächst wäre hierzu allerdings eine Hamilton'sche Formulierung des nichtkompakten Modells auf dem Gitter notwendig, die ich hier kurz andeuten will.

Der Hilbertraum $\mathcal{H}_\Lambda$ im endlichen räumlichen Volumen Λ ,

$$\mathcal{H}_\Lambda = L^2(D_\Lambda \vec{A} \mid D_\Lambda \phi)$$

ist der übliche Darstellungsraum der Algebra der kanonischen Vertauschungsregeln in $A_0 = 0$ Eichung. $\mathcal{H}_\Lambda$ trägt in natürlicher Weise eine unitäre Darstellung U_Λ der Gruppe der zeitunabhängigen Eichtransformationen $G_\Lambda = \mathcal{G}_\Lambda(R)$. Sei $\chi \in G_\Lambda$ und $\psi \in \mathcal{H}_\Lambda$, dann ist

$$(U_\Lambda(\chi) \psi)(A, \phi) := \psi(A + d_\Lambda \chi, e^{-i\chi} \phi)$$

Die Tatsache, daß G_Λ nicht kompakt ist, führt hierbei gegenüber kompakten Eichtheorien zu einer leichten technischen Komplikation: $\mathcal{H}_\Lambda$ zerfällt lediglich in ein direktes Integral

$$\mathcal{H}_\Lambda \cong \int_{\mathcal{Q}} \mathcal{H}_{\Lambda, q} \, D_\Lambda q$$

über irreduzible Darstellungen $q \in G_\Lambda' \cong \Omega_\Lambda^0(R)$ von G_Λ . Hierbei ist $\mathcal{H}_{\Lambda, q}$ der Hilbertraum zur äußeren Ladungsverteilung q , d.h. der Raum der Wellenfunktionen ψ_q , die sich unter Eichtransformationen $\chi \in G_\Lambda$ gemäß

$$\psi_q \mapsto e^{i(\chi, q)} \psi_q$$

transformieren. Man beachte, daß hiermit $|\psi_q(A, \phi)|^2$ eichinvariant und folg-

*) Für eine ähnliche Aussage bezüglich des Erwartungswerts von Φ s. [King, Yaffe 1986].

lich ψ_q nicht quadratintegrabel in $L^2(D_A A \ D_A \phi)$ ist. Im Unterschied zu kompakten Eichtheorien ist also $\mathcal{H}_{\Lambda, q} \not\subset \mathcal{H}_\Lambda$ kein Unterhilbertraum. Das Skalarprodukt in $\mathcal{H}_{\Lambda, q}$ ist vielmehr konsistent mit der obigen Zerlegung in ein direktes Integral zu wählen. Eine heuristische Herleitung geht wie folgt: Wir wollen jedes $\psi \in \mathcal{H}_\Lambda$ darstellen als eine Familie

$$\psi \cong (\psi_q)_{q \in G_\Lambda}$$

mit $\psi_q \in \mathcal{H}_{\Lambda, q}$. Das Skalarprodukt in $\mathcal{H}_\Lambda$ soll sich dann schreiben lassen als

$$\langle \psi | \psi \rangle_{\mathcal{H}_\Lambda} = \int D_A q \langle \psi_q | \psi_q \rangle_{\mathcal{H}_{\Lambda, q}}$$

Die ψ_q 's erhalten wir aus ψ durch den "Quasi-Projektor" $P_{\Lambda, q}: \mathcal{H}_\Lambda \rightarrow \mathcal{H}_{\Lambda, q}$,

$$P_{\Lambda, q}(\psi) = \psi_q := \int D_A x e^{-i(x, q)} \mu_\Lambda(x) \psi$$

Aufgrund der Identität

$$\int D_A q |\psi_q(\pi, \phi)|^2 = \int D_A x |\psi(\pi + d_A x, e^{-i x} \phi)|^2$$

werden wir unmittelbar zu folgender Definition geführt:

$$\langle \psi_q | \psi_q \rangle_{\mathcal{H}_{\Lambda, q}} := \int d\mu_\Lambda([\pi, \phi]) |\psi_q([\pi, \phi])|^2$$

Hierbei ist $d\mu_\Lambda$ das eindeutig bestimmte Maß auf dem Raum der Eichäquivalenzklassen $\{[\pi, \phi]\}$, so daß für beliebige $f \in L^1(D_A A \ D_A \phi)$ gilt:

$$\int d\mu_\Lambda \bar{f} = \int D_A \pi D_A \phi f$$

wobei

$$\bar{f}(\pi, \phi) := \int D_A x f(\pi + d_A x, e^{-i x} \phi)$$

die eichgemittelte Funktion ist und wir eichinvariante Funktionen immer als Funktionen auf den Eichäquivalenzklassen auffassen. Eichinvariante Operatoren B_Λ auf $\mathcal{H}_\Lambda$ zerfallen nun ebenfalls in ein direktes Integral

$$B_\Lambda = \int_{\oplus} B_{\Lambda, q} D_A q$$

wobei $B_{\Lambda, q}: \mathcal{H}_{\Lambda, q} \rightarrow \mathcal{H}_{\Lambda, q}$ durch $P_{\Lambda, q} B_\Lambda = B_{\Lambda, q} P_{\Lambda, q}$

eindeutig bestimmt ist^(*). Beispielsweise gilt für eichinvariante Integralkerne, also insbesondere die Transfermatrix T_Λ

(*) Subtilitäten, die die Definitionsbereiche betreffen, seien hier außer Acht gelassen.

$$(T_{\lambda,q} \psi_q)(\pi, \phi) = \int D_\lambda \pi' D_\lambda \phi' T_\lambda(\pi, \phi; \pi', \phi') \psi_q(\pi', \phi')$$

und

$$\text{Tr}(T_{\lambda,q}) = \int d\mu_\lambda([\pi, \phi]) \int D_\lambda \chi T_\lambda(\pi, \phi; \pi + d_\lambda \chi, e^{-i\chi} \phi) e^{i(\chi, q)}$$

Für die konkrete Rechnung muß man das Maß $d\mu_\lambda$ auf dem Raum der Eichäquivalenzklassen durch Wahl einer geeigneten Eichung realisieren. Hier bietet sich z.B. die Coulombeichung an. Sie wird definiert durch den Querschnitt $\mathcal{C}_\lambda$

$$\mathcal{C}_\lambda([\pi, \phi]) := ((d^* \Delta^{-1} d)_\lambda \pi, e^{i \Delta_\lambda^{-1} d_\lambda^* \pi} \phi)$$

der jeder Eichäquivalenzklasse ihren Vertreter in Coulombeichung zuordnet. Als Bild von $d\mu_\lambda$ unter $\mathcal{C}_\lambda$ erhält man das Maß

$$D_\lambda^T \pi D_\lambda \phi := D_\lambda \pi \delta(\Delta_\lambda^{-1} d_\lambda^* \pi) D_\lambda \phi$$

Aufgefaßt als Integralkern bezüglich dieses Maßes schreibt sich die Transfermatrix in $\mathcal{H}_{\lambda,q}$ nun als

$$T_{\lambda,q}(\pi, \phi; \pi', \phi') = \int D_\lambda \chi T_\lambda(\pi, \phi; \pi' + d_\lambda \chi, e^{-i\chi} \phi') e^{i(\chi, q)}$$

Im Pfadintegralformalismus zur Berechnung der Spur $\text{Tr}(T_{\lambda,q}^\beta)$ läßt sich die χ -Variable dann wie in kompakten Eichtheorien wieder als euklidische A_0 -Komponente uminterpretieren, und man erhält den euklidischen Erwartungswert in Coulombeichung eines Polyakov-Loops zur äußeren Ladung q . Der Vakuumzustand Ω ergibt sich schließlich als Grundzustand im Hilbertraum zur äußeren Ladung $q = 0$ und die Vakuumerwartungswerte daher zunächst als euklidische Erwartungswerte in Coulombeichung. Wegen der Eichinvarianz können wir anschließend jeweils auch wieder zu einer beliebigen Eichung übergehen.

Hiermit wird klar, daß sich die Hamilton'sche Struktur der nicht kompakten Theorie sowohl für $T = 0$ als auch für positive Temperatur $T > 0$ nicht wesentlich von kompakten Modellen unterscheidet. Zur Charakterisierung der Higgsphase für $T > 0$ würde ich nun neben dem räumlichen exponentiellen Abfall trunkierter Korrelationen in Anlehnung an [Dirac 1955] auch den Erwartungswert von ϕ in Coulomb-Eichung als Ordnungsparameter vorschlagen. Die zugehörige 2-Punkt-

funktion entspricht dann dem eichinvarianten Operator zur Zeit $t = 0$

$$\Psi_{xy} := \Phi(x) e^{i(\int_A \Delta_3^{-1} dq)} \Phi^\dagger(y), \quad q = \delta_x - \delta_y$$

wobei Δ_3 der Laplace Operator in der $t = 0$ Hyperebene ist. Man erwartet $|\langle \Psi_{xy} \rangle| \gg \text{const.}$ in der Higgsphase und $\langle \Psi_{xy} \rangle \sim \exp(-m|x-y|)$ in der Coulombphase (s. auch [Fröhlich, Marchetti 1986]).

Ein weiteres interessantes Problem wird in diesem Zusammenhang durch die Frage der Existenz geladener Zustände aufgeworfen. Eine naive Anwendung der kanonischen Vertauschungsrelationen würde für den Erwartungswert des Ladungsoperators Q_Λ im Volumen Λ im Zustand $\Psi_{xy} \Omega$

$$\lim (\Psi_{xy}, Q_\Lambda \Psi_{xy}) = 1$$

liefern (falls $x \in \Lambda$), wobei $Q_\Lambda = \sum_{x \in \Lambda_0} (d^* E)_x$. Man würde also im Widerspruch zu Swiecas Theorem [Swieca 1976; Buchholz, Fredenhagen 1979] die Existenz eines geladenen Zustands

$$\omega_x(\cdot) := \lim_{y \rightarrow \infty} (\Psi_{xy} \Omega, \cdot \Psi_{xy} \Omega)$$

auch in der Higgsphase folgern. Da wir jedoch annehmen wollen, daß in der Higgsphase

$$\lim_{y \rightarrow \infty} (\Omega, \Psi_{xy} \Omega) = \langle \phi_x \rangle_{\text{Coulomb}} \neq 0$$

gilt, wäre der Grenzvektor $\Omega_x := \lim_{y \rightarrow \infty} \Psi_{xy} \Omega$ (falls er existiert) nicht orthogonal

zum Vakuum und der Zustand ω_x jedenfalls nicht disjunkt zum Vakuumsektor. Seine Interpretation als ein physikalisch akzeptabler geladener Zustand ist daher unzulässig: Das Problem in diesem Zusammenhang ist, daß " $\lim_\Lambda Q_\Lambda$ " im Operatorsinn nicht existiert und der entsprechende Erwartungswert daher nicht unbedingt aussagekräftig ist. Im Zeitkontinuumlimes wäre es u.U. möglich, regularisierte

Versionen des Ladungsoperators aus dem Kontinuum auf die Gittereichtheorie zu übertragen, indem man eine geeignete Zeitmittelung von $e^{iHt} Q e^{-iHt}$ verwendet.

Ein anderer Kandidat für einen geladenen Zustand ist selbstverständlich der von [Fredenhagen, Marcu 1983] vorgeschlagene

$$\omega_x(.) := \lim (F_{xy} \Omega, . F_{xy} \Omega) \|F_{xy} \Omega\|^{-2}$$

$$F_{xy} := \bar{\Phi}(x) \Phi(y) T_q^{\frac{|x-y|}{2}} U_{xy}(A)$$

wobei $U_{xy}(A)$ der Paralleltransporter längs der Geraden von x nach y ist und $q = \delta_y - \delta_x$. Für eine Untersuchung im Zeitkontinuumlimes wäre aber evtl. auch die von den gleichen Autoren erwähnte Version

$$\omega_x(.) := (\Omega_x, \bar{\Phi}(x) \cdot \Phi(x) \Omega_x) (\Omega_x, \bar{\Phi}(x) \Phi(x) \Omega_x)^{-1}$$

die geeignetere, wobei Ω_x der Grundzustand zur äußeren Ladung $q = \delta_x$ ist. Sie hat zumindest den Vorzug, daß sie sich auch unmittelbar auf positive Temperatur $T = \beta^{-1} > 0$ verallgemeinern läßt:

$$\omega_q^\beta(f) := \lim_{\Lambda} Z_\Lambda^{-1}(q) \text{Tr} (\bar{\Phi}^q f \Phi^q T_{\Lambda,q}^\beta)$$

In diesem Zusammenhang könnte man versuchen, dem Problem der Nicht-Existenz von $\lim_{\Lambda} Q_\Lambda$ dadurch auszuweichen, daß man das elektrische Feld nur auf einem Bond in Λ mißt und stattdessen die äußere Ladung q in der geometrischen Anordnung eines Plattenkondensators (mit konstanter Ladungsdichte) auf den Rand von Λ verteilt. In Analogie zum Meissnereffekt sollte man erwarten, daß sich im thermodynamischen Limes ein homogenes elektrisches Feld in der Coulombphase aufbaut, während die äußeren Ladungen in der Higgsphase abgeschirmt sind.

Mit diesen Anregungen will ich die Untersuchungen zur Phasenstruktur des nicht-kompakten Modells beenden und mich im nächsten Kapitel mit dem Problem der Gribov-Kopien und den daraus resultierenden Konsequenzen für die spontane Symmetriebrechung im kompakten Modell befassen.

Kapitel 3

DAS KOMPAKTE MODELL

In diesem Kapitel werden α -Eichungen und die Frage der spontanen Symmetriebrechung in kompakten $U(1)$ -Higgsmodellen untersucht. Neuartig ist hierbei eine strenge Behandlung des Gribov-Problems, das gemeinhin nur aus nicht-abelschen Eichtheorien bekannt ist. Wie bereits in Kapitel 1 erwähnt, werden die Gribov-Kopien hier durch eine Untergruppe Grib von Eichtransformationen erzeugt. Genauer genommen handelt es sich um die Gruppe der harmonischen 0-Formen mit Werten in $U(1)$. Selbst bei Dirichlet-Randbedingungen wächst deren Anzahl exponentiell mit dem Volumen $|\Lambda|$ und ist genau durch die Determinante des diskreten Laplace-Operators in Λ gegeben. Es zeigt sich, daß nur sehr spezielle eichabhängige Korrelationsfunktionen einen nicht verschwindenden Erwartungswert erhalten können, falls Grib ungebrochen ist. Zu diesen zählen jedenfalls weder ϕ_x noch $\bar{\phi}_x \phi_y$ für $x \neq y$.

In Abschnitt 3.1 werden zunächst α -Eichungen mit $\alpha > 0$ definiert und untersucht. Bezüglich der globalen Symmetriebrechung erhält man genau die gleichen Resultate wie in § 2.1, d.h. insbesondere

$$\langle \phi_x \rangle_\alpha = 0$$

falls $\alpha > 0$ und $2 \leq d \leq 4$. Für große α wird gezeigt, daß auch Grib ungebrochen ist. Es folgt eine heuristische Argumentation, warum diese Aussage ebenfalls für alle positiven α gültig sein sollte.

In Abschnitt 3.2 wird dann das kompakte Analogon zur Landau-Eichung behandelt. Da wegen der Gribov-Kopien ein Zugang à la Kennedy-King nicht möglich ist, wird eine alternative Methode entwickelt, die Landau-Eichung analytisch zu behandeln. Die Grundidee besteht darin, die Eichfelder wie einen erhaltenen Strom als Divergenz eines neu einzuführenden antisymmetrischen dynamischen Tensorfelds $V_{\mu\nu}$ zu schreiben

$$A_\nu = \partial_\mu V_{\mu\nu}$$

Die solchermaßen gebildeten Eichfelder erfüllen automatisch die Zwangsbedingung der Landau-Eichung. Es wird gezeigt, daß hierdurch jedem Gibbszustand in Landau-Eichung ein-eindeutig ein entsprechender Gibbszustand in den neuen Feldern V_μ zugeordnet ist. Mit Hilfe dieser Zuordnung ist es schließlich möglich zu beweisen, daß in einem Teil der Confinement/Higgsphase weder die globale Symmetrie noch Grib spontan gebrochen sind. Es folgt zumindest für die Modelle mit eingefrorener Länge $|\Phi| = a$ des Higgsfelds, daß der Erwartungswert von Φ auch in Landau-Eichung kein geeigneter Ordnungsparameter zur Beschreibung der Phasenstruktur dieser Systeme ist.

In Abschnitt 3.3 gebe ich schließlich Anregungen zur Untersuchung einer abstrakteren Eichfixierung ohne Gribov-Kopien, die meiner Meinung nach tatsächlich zu einer spontanen Symmetriebrechung in der Higgsphase führen sollte.

Abschließend möchte ich für dieses Kapitel noch folgende Notationen einführen. Für eine $U(1)$ -wertige ν -Form ω auf Λ bezeichnet $d_\Lambda \omega$ (bzw. $d_\Lambda^* \omega$) diejenige $(\nu+1)$ -Form (bzw. $(\nu-1)$ -Form) mit Werten in $U(1)$, die sich ergibt, indem wir in den ursprünglichen Definitionen (1.17) bzw. (1.22) alle additiven Operationen durch die entsprechenden multiplikativen ersetzen. Für $U = e^{iA} \in \Omega_\Lambda^1(U(1))$ folgt beispielsweise

$$d_\Lambda U = e^{i d_\Lambda^{NC} A} \quad d_\Lambda^* U = e^{i d_\Lambda^{*NC} A}$$

wobei ich bei Gefahr von Verwirrung die alten additiven Operationen durch ein Superscript "NC" (non-compact) auszeichne. Entsprechendes gilt für Δ_Λ und Δ_Λ^{NC} . Oft werde ich die Menge der $U(1)$ -wertigen ν -Formen in Λ als kompakte Lie-Gruppe mit punktweise definierter Multiplikation auffassen. In diesem Zusammenhang werden die Abbildungen d_Λ , d_Λ^* und Δ_Λ zu Lie-Gruppenhomomorphismen* was ich des öfteren implizit ausnützen werde. Schließlich benütze ich, wie gehabt, für die duale Paarung mit Elementen $q \in \Omega_\Lambda^0(Z)$ oder $j \in \Omega_\Lambda^1(Z)$ die Notation

$$g^q := \prod_{x \in \Lambda_0} g(x)^{q(x)} \quad U^j := \prod_{b \in \Lambda_1} U(b)^{j(b)}$$

*) Es handelt sich hier um abelsche Gruppen.

3.1 Eichfixierung und Gribov-Kopien

Ich möchte zunächst kurz verifizieren, daß in kompakten Modellen durch (1.27) bzw. allgemeiner durch beliebige periodische Funktionen von d^*A , also Funktionen von d^*U , eine legitime Eichfixierung im Sinne von (1.28) geliefert wird.

$$\begin{aligned}
 & \int_{D_\Lambda g} e^{S_{gf}(d_\Lambda^*(U d_\Lambda g))} \\
 &= \int_{D_\Lambda g} e^{S_{gf}(d_\Lambda^* d_\Lambda(g'g))} \\
 &= \int_{D_\Lambda g} e^{S_{gf}(d_\Lambda^* d_\Lambda g)} \\
 &= \text{const.}
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Hierbei folgt die zweite Gleichung aus der Invarianz des Haarmaßes $D_\Lambda g$ auf $\mathcal{G}_\Lambda \equiv \Omega_\Lambda^0(U(1))$ unter Gruppenmultiplikationen und die erste aus der Homomorphis-
museigenschaft von $d_\Lambda^* d_\Lambda : \mathcal{G}_\Lambda \rightarrow \mathcal{G}_\Lambda$ sowie der Tatsache, daß es zu jedem $U \in \Omega_\Lambda^1(U(1))$ ein $g' \in \mathcal{G}_\Lambda$ gibt, (*) so daß $d_\Lambda^* d_\Lambda g' = d_\Lambda^* U$.

Aber bereits hier deutet sich eine analoge "Gribov-Ambiguität" wie in [Gribov 1978] an: g' ist selbst bei Dirichlet-Randbedingungen (d.h. in offenen Komplexen Λ) nicht eindeutig bestimmt, d.h. es gibt nicht-triviale $g \in \text{Ker } d_\Lambda^* d_\Lambda$ und folglich sog. Gribov-Kopien $U' = U d_\Lambda g$, für die die Eichfixierungsfunktion den selben Wert annimmt:

$$d_\Lambda^* U' = d_\Lambda^* U$$

In diesem Fall haben wir jedoch die etwas speziellere Situation, daß die Gribov-Kopien durch eine Untergruppe von Eichtransformationen erzeugt werden:

$$\underline{\text{Grib}} := \text{Ker } d_\Lambda^* d_\Lambda$$

Lemma 3.1: Sei Λ ein beliebiger endlicher zusammenhängender Zellenkomplex und $\hat{\Delta}_\Lambda$ die Einschränkung von $\Delta_\Lambda^{\text{NC}} : \Omega_\Lambda^0(\mathbb{R}) \rightarrow \Omega_\Lambda^0(\mathbb{R})$ auf das l^2 -orthogonale Komplement zu den Harmonischen in $\Omega_\Lambda^0(\mathbb{R})$, d.h. $\hat{\Delta}_\Lambda : (\text{Ker } d_\Lambda^{\text{NC}})^\perp \rightarrow (\text{Ker } d_\Lambda^{\text{NC}})^\perp$. Dann gilt:

$$\underline{\text{Grib}}_\Lambda / \text{Ker } d_\Lambda \text{ ist diskret mit } |\text{Grib}_\Lambda / \text{Ker } d_\Lambda| = \det \hat{\Delta}_\Lambda$$

(*) Setze $U = e^{iA}$, $g' = e^{i\varphi'}$, so daß $\Delta_\Lambda^{\text{NC}} \varphi' = d_\Lambda^* A$.

Bemerkung: Hieraus folgt, daß es zu jedem $U \in \Omega_\Lambda^1(U(1))$ genau $N_\Lambda = (\det \dot{\Delta}_\Lambda)$ Gribov-Kopien gibt. Man beachte, daß N_Λ exponentiell mit dem Volumen $|\Lambda_0|$ wächst.

Beweis:

$d_\Lambda^* d_\Lambda: \mathcal{G}_\Lambda \rightarrow \mathcal{G}_\Lambda$ ist Liegruppenhomomorphismus mit $\text{Ker } d_\Lambda \subset \text{Ker } d_\Lambda^* d_\Lambda$. Sei $f_\Lambda: \mathcal{G}_\Lambda / \text{Ker } d_\Lambda \cong \bar{\mathcal{G}}_\Lambda \rightarrow \mathcal{G}_\Lambda$ der induzierte Homomorphismus und $\dot{\mathcal{G}}_\Lambda := f_\Lambda^{-1}(\bar{\mathcal{G}}_\Lambda)$ die Bildgruppe. Weiter seien $\bar{\omega}_\Lambda$ und $\dot{\omega}_\Lambda$ die Volumenformen auf $\bar{\mathcal{G}}_\Lambda$ und $\dot{\mathcal{G}}_\Lambda$, die zu den entsprechenden normierten Haarmaßen assoziiert sind. Ich zeige

$$f_\Lambda^* \dot{\omega}_\Lambda = (\det \dot{\Delta}_\Lambda) \bar{\omega}_\Lambda \quad (3.2)$$

wobei f_Λ^* der differentialgeometrische "pull back" ist. Hieraus folgt die Behauptung mit der "Grad-Formel" (siehe z.B. [Guillemin, Pollack 1974; Choquet-Bruhat et al. 1982]):

$$\begin{aligned} \det \dot{\Delta}_\Lambda &= \int_{\bar{\mathcal{G}}_\Lambda} (\det \dot{\Delta}_\Lambda) \bar{\omega}_\Lambda(\bar{g}) = \int_{\dot{\mathcal{G}}_\Lambda} (f_\Lambda^* \dot{\omega}_\Lambda)(\bar{g}) \\ &= \deg f_\Lambda \int_{\dot{\mathcal{G}}_\Lambda} \dot{\omega}_\Lambda(g) = \deg f_\Lambda \end{aligned} \quad (3.3.)$$

wobei $\deg(f_\Lambda)$ der Grad von f_Λ ist. Nach (3.2) ist f_Λ eine Immersion (NB: $\det \dot{\Delta}_\Lambda > 0$), also lokal injektiv, und $\text{Grib}_\Lambda / \text{Ker } d_\Lambda = \text{Ker } f_\Lambda$ daher diskret. Weiter ist f_Λ orientierungstreu, also $|\text{Ker } f_\Lambda| = \deg f_\Lambda$, und es folgt die Behauptung $|\text{Grib}_\Lambda / \text{Ker } d_\Lambda| = |\text{Ker } f_\Lambda| = \deg f_\Lambda = \det \dot{\Delta}_\Lambda$.

Um (3.2) zu zeigen beachtet man, daß $\text{Ker } d_\Lambda$ je nach Randbedingungen entweder trivial ist oder genau aus den konstanten Eichtransformationen besteht.

Im ersten Fall ist dann auch $\text{Ker } d_\Lambda^{\text{NC}} = 0$ trivial und $\Delta_\Lambda^{\text{NC}} = \dot{\Delta}_\Lambda$ daher auf $\Omega_\Lambda^0(\mathbb{R})$ invertierbar. Es folgt (*) $\dot{\mathcal{G}}_\Lambda = \mathcal{G}_\Lambda = \bar{\mathcal{G}}_\Lambda$ und für das Differential $f'_\Lambda(e): T_e \mathcal{G}_\Lambda \rightarrow T_e \mathcal{G}_\Lambda$ gilt bezüglich der kanonischen Isomorphie $T_e \mathcal{G}_\Lambda \cong \Omega_\Lambda^0(\mathbb{R})$ klarerweise

$$f'_\Lambda(e) = \Delta_\Lambda^{\text{NC}}$$

(*) Zu $g = e^{i\varphi} \in \mathcal{G}_\Lambda$ wähle $h = e^{i(\Delta_\Lambda^{\text{NC}})^{-1}\varphi} \in \mathcal{G}_\Lambda \Rightarrow d_\Lambda^* d_\Lambda h = g$.

($e \in \mathcal{G}_\Lambda$ ist hier das Einselement). Hieraus folgt (3.2) zunächst am Einselement e . Da jedoch f_Λ Homomorphismus ist, ist $f_\Lambda^* \tilde{\omega}_\Lambda$ invariant unter Gruppenmultiplikationen und (3.2) gilt daher für alle $g \in \mathcal{G}_\Lambda$.

Im nicht trivialen Fall ist $\text{Ker } d_\Lambda$ eindimensional, und es gilt

$$\mathring{\mathcal{G}}_\Lambda = \{ g \in \mathcal{G}_\Lambda : \prod_{x \in \Lambda_0} g(x) = 1 \} \quad (3.4)$$

In der Tat gibt es zu jedem $g \in \mathcal{G}_\Lambda$ mit $\prod_{x \in \Lambda_0} g(x) = 1$ ein $\chi \in \Omega_\Lambda^\circ(\mathbb{R})$ mit $g = e^{i\chi}$ und $\sum_{x \in \Lambda_0} \chi(x) = 0$. Dieses χ ist also orthogonal zu den Konstanten und daher im Bild von d_Λ^{NC} . Sei $\chi = d_\Lambda^{\text{NC}} \psi$ und $h = e^{i\psi}$, dann gilt $d_\Lambda^* d_\Lambda h = g$. Umgekehrt gilt für alle $g \in \mathcal{G}_\Lambda$

$$\prod_{x \in \Lambda_0} (d_\Lambda^* d_\Lambda g)(x) = (d_\Lambda^* d_\Lambda g) \mathbb{1}_\Lambda$$

wobei $\mathbb{1}_\Lambda \in \Omega_\Lambda^\circ(\mathbb{Z})$ definiert ist durch $\mathbb{1}_\Lambda(x) = 1 \quad \forall x \in \Lambda_0$. Falls $\text{Ker } d_\Lambda$ nicht-trivial ist, ist auch d_Λ^{NC} nicht-trivial und weiter $\mathbb{1}_\Lambda \in \text{Ker } d_\Lambda^{\text{NC}}$. Folglich

$$(d_\Lambda^* d_\Lambda g)^{\mathbb{1}_\Lambda} = (d_\Lambda g)^{d_\Lambda^{\text{NC}} \mathbb{1}_\Lambda} = (d_\Lambda g)^\circ = 1$$

womit (3.4) gezeigt ist.

Ich definiere nun einen Liegruppenisomorphismus $\tau_\Lambda: \mathring{\mathcal{G}}_\Lambda \rightarrow \bar{\mathcal{G}}_\Lambda$ und zeige die zu (3.2) äquivalente Behauptung

$$f_\Lambda^* \tilde{\omega}_\Lambda = \text{def } \mathring{f}_\Lambda \tilde{\omega}_\Lambda \quad (3.5)$$

wobei

$$\mathring{f}_\Lambda := f_\Lambda \circ \tau_\Lambda$$

Sei $i_\Lambda: \mathring{\mathcal{G}}_\Lambda \rightarrow \mathcal{G}_\Lambda$ die kanonische Injektion und $\pi_\Lambda: \mathcal{G} \rightarrow \bar{\mathcal{G}}_\Lambda$ die Projektion, dann ist

$$\tau_\Lambda = \pi_\Lambda \circ i_\Lambda$$

Isomorphismus. (Denn $(\text{Ker } \pi_\Lambda) \cap \mathring{\mathcal{G}}_\Lambda = (\text{Ker } d_\Lambda) \cap \mathring{\mathcal{G}}_\Lambda = \{e\}$, d.h. τ_Λ ist injektiv, und zu $g \in \mathcal{G}_\Lambda$, $g^{\mathbb{1}_\Lambda} = e^{i\chi} \in U(1)$ wähle $\psi := |\Lambda_0|^{-1} \chi$ und setze $h := e^{-i\psi} \in U(1) \cong \text{Ker } d_\Lambda$. Dann gilt $(gh)^{\mathbb{1}_\Lambda} = g^{\mathbb{1}_\Lambda} h^{\mathbb{1}_\Lambda} = 1$ und folglich $gh \in \mathring{\mathcal{G}}_\Lambda$, d.h. τ_Λ ist surjektiv.) Nun ist aber $\mathring{f}_\Lambda = f_\Lambda \circ \tau_\Lambda$ nichts anderes als die Einschränkung von $d_\Lambda^* d_\Lambda$ auf $\mathring{\mathcal{G}}_\Lambda$, also

$$\mathring{f}_\Lambda \equiv d_\Lambda^* d_\Lambda : \mathring{\mathcal{G}}_\Lambda \rightarrow \mathring{\mathcal{G}}_\Lambda$$

Bezüglich der natürlichen Isomorphie $T_e \dot{g}_\Lambda = (\text{Ker } d_\Lambda^{\text{NC}})^\perp$ gilt also für das Differential

$$\dot{f}_\Lambda(e) = \dot{\Delta}_\Lambda$$

woraus (3.5) folgt wie zuvor (3.2). $\blacksquare$

Ich möchte darauf hinweisen, daß bei Verwendung der Villain-Polyakov Wirkung (1.25b) mit $\beta = e^{-2}$ sowie der Eichfixierung (1.27b) das kompakte Modell sich störungstheoretisch^(*) in keiner Weise vom nicht-kompakten unterscheidet (die Beiträge $n \neq 0$ in den entsprechenden bei der Definition der Wirkung auftretenden Summen sind exponentiell unterdrückt, d.h. insbesondere in jeder Ordnung der Loop-Entwicklung). Trotzdem haben wir nicht-störungstheoretisch diese enorme Anzahl von Gribov-Kopien und das folgende Lemma soll verdeutlichen mit welchen Auswirkungen für die Erwartungswerte eichabhängiger Größen man evtl. rechnen muß. Sei im folgenden

$$\underline{\text{Grib}} := \{g \in \Omega_{\Lambda^\infty}^0(U(1)) / d^* d g = \mathbb{1}\}$$

die verbleibende Symmetriegruppe im unendlichen Volumen und

$$\underline{\text{Glob}} := \{g \in \underline{\text{Grib}} / d g = \mathbb{1}\}$$

die Untergruppe der globalen Eichtransformationen. Weiter sei $C^\nu(G)$ die Menge der ν -Formen auf Λ^∞ mit endlichem Träger und Werten in G (z.B. $G = \mathbb{R}, \mathbb{Z}, U(1), \dots$).

Lemma 3.2: Sei $j \in C^1(\mathbb{Z})$ und $q_i \in C^0(\mathbb{Z})$, $i = 1, 2$. Setze $q := d^* j + q_2 - q_1$. In $d \geq 2$ Dimensionen ist die Funktion $U^j \Phi^{q_1} \bar{\Phi}^{q_2}$ genau dann invariant unter $\underline{\text{Grib}}$, wenn es $n \in C^0(\mathbb{Z})$ gibt mit $\Delta n = q$.

Bemerkung: Falls also $\underline{\text{Grib}}$ im thermodynamischen Limes nicht gebrochen ist, bedeutet dies, daß beispielsweise die Zweipunktfunktion $\langle \bar{\Phi}(x) \Phi(y) \rangle$ an nicht koinzidierenden Punkten (d.h. $x \neq y$) identisch verschwindet. In der Tat gilt hier mit der obigen Notation $q(\cdot) = \delta_y(\cdot) - \delta_x(\cdot)$, und es gibt klarerweise kein $n \in C^0(\mathbb{Z})$ mit $\Delta n = q$.

(*) gemeint ist die naive Störungstheorie unter Vernachlässigung der Gribov-Kopien

Beweis:

Da unter Eichtransformationen $g \in \Omega_\lambda^0(U(1))$

$$u^i \phi^{q_1} \bar{\phi}^{q_2} \rightarrow g^q u^i \phi^{q_1} \bar{\phi}^{q_2}$$

ist die Invarianz unter Glob äquivalent zu $\sum_x q(x) = 0$ und die Invarianz unter Grib äquivalent zu

$$g^q = 1 \quad \forall g \in \text{Grib}$$

Mit $g = e^{i2\pi\chi}$ ist dies weiter äquivalent zu

$$(\chi, q) \in \mathbb{Z} \quad \forall \chi \in \Omega^0(\mathbb{R}) : \Delta\chi \in \Omega^0(\mathbb{Z}) \quad (3.6)$$

$q = \Delta n$ mit $n \in C^0(\mathbb{Z})$ ist hierfür selbstverständlich hinreichend, da dann $(\chi, q) = (\Delta\chi, n) \in \mathbb{Z}$, falls $\Delta\chi \in \Omega^0(\mathbb{Z})$. Umgekehrt ist wegen $q \in C^0(\mathbb{Z})$ und $\sum_x q(x) = 0$ die Fouriertransformierte

$$\tilde{q}(p) := \sum_{y \in \Lambda_0^\infty} e^{-ipy} q(y)$$

als Funktion von $p \in \mathbb{R}^d$ differenzierbar mit $\tilde{q}(0) = 0$.

Wir setzen für jedes x

$$n(x) := \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \left[\sum_{\mu=1}^d (2 - 2 \cos p_\mu) \right]^{-1} e^{ipx} \tilde{q}(p) \quad (3.7)$$

In $d \geq 2$ ist $n \in \Omega^0(\mathbb{R})$ punktweise wohldefiniert, und es gilt $\Delta n = q$.

Ich zeige, daß unter der Voraussetzung (3.6) für alle $x, y \in \Lambda_0^\infty$ gilt:

$$n(x) - n(y) \in \mathbb{Z} \quad (3.8)$$

Da jedoch nach (3.7) $\lim_{|x| \rightarrow \infty} n(x) = 0$ ist, folgt $n(x) \in \mathbb{Z}$, $\forall x \in \Lambda_0^\infty$, und damit weiter die Behauptung $n \in C^0(\mathbb{Z})$.

Um (3.8) aus (3.6) herzuleiten, beachte man, daß

$$n(x) - n(y) = (m, n) = (\Delta\chi, n)$$

wobei $m(.) = \delta_x(.) - \delta_y(.)$ und χ sich aus m ergibt genauso wie n aus q . Nun ist zwar im allgemeinen weder n noch χ l^2 -summierbar, aber dafür sowohl $d n$ als auch $d \chi$. Dies genügt (s. Lemma 3.3, bewiesen in Anhang B), um zu zeigen

$$(\Delta \chi, n) = (\chi, \Delta n) = (\chi, q)$$

Also ist $n(x) - n(y) = (\chi, q) \in \mathbb{Z}$ nach Voraussetzung, da $\Delta \chi = m \in \Omega^0(Z)$. $\square$

Lemma 3.3: $(\Delta \chi, n) = (d \chi, d n) = (\chi, \Delta n)$

Hiermit habe ich demonstriert, daß durch das Auftreten von Gribov-Kopien das eichfixierte kompakte Modell sich in seinem eichabhängigen Green-Funktionen grundsätzlich vom nicht-kompakten unterscheidet (obwohl sie störungstheoretisch quasi äquivalent sind), falls (!) Grib nicht spontan gebrochen ist. Um nun diese Frage genauer zu untersuchen, gehe ich zunächst genauso vor wie in § 2.1. Analog zu (2.6) definiere ich Erwartungswerte in einem endlichen, offenen Kasten $\Lambda \subset \Lambda^\infty$ mit allgemeinsten Randbedingungen auf dem erweiterten Rand $\hat{\partial} \Lambda$ gemäß

$$E_{\Lambda, \alpha}(\phi | \hat{u}, \hat{\phi}) := Z_{\Lambda, \alpha}(\hat{u}, \hat{\phi})^{-1} \int D_{\hat{\Lambda}} U D_{\hat{\Lambda}} \phi \delta_{\hat{\partial} \Lambda}(u \hat{u}^{-1}) \delta_{\partial \Lambda}(\phi - \hat{\phi}) \phi e^{S_{\hat{\Lambda}, \alpha}} \quad (3.9)$$

wobei $S_{\hat{\Lambda}, \alpha}(u, \phi) = S_{\text{inv}, \hat{\Lambda}}(u, \phi) + S_{\text{gf}, \hat{\Lambda}, \alpha}(d^* u)$

Für S_{inv} und S_{gf} wähle ich eine der Varianten aus (1.25) bzw. (1.27).

$\delta_{\hat{\partial} \Lambda}(U U^{-1})$ ist ein Produkt über $b \in (\hat{\partial} \Lambda)_1$ von "δ-Funktionen" auf $U(1)$, d.h. $U(b) = \hat{U}(b) \forall b \in (\hat{\partial} \Lambda)_1$. Im Limes $\alpha = 0$ wird $\exp[S_{\text{gf}, \hat{\Lambda}, \alpha}(d^* U)]$ ersetzt durch $\delta(d_{\hat{\Lambda}}^* U)$. Genaugenommen meine ich hierbei mit $D_{\hat{\Lambda}} U \delta(d_{\hat{\Lambda}}^* U)$ das normierte Haarmaß auf der Gruppe $\text{Ker } d_{\hat{\Lambda}}^* \subset \Omega_{\hat{\Lambda}}^1(U(1))$. Weiter definiere ich $E_{\Lambda, \alpha}^{\text{Spin}}(. | \hat{g})$ als Erwartungswert im $U(1)$ Spinmodell mit Wirkung $S_{\text{gf}, \hat{\Lambda}, \alpha}(d^* d g)$ und Randbedingung $g = \hat{g}$ auf $\partial \Lambda$ und $g = 1$ auf $\hat{\partial} \Lambda$. Hiermit gilt in Analogie zu Satz 2.2:

Satz 3.4: [Borgs, Nill 1986 a] Zu jeder Randkonfiguration $(\hat{u}, \hat{\phi})$ auf $\hat{\partial} \Lambda$ gibt es ein Wahrscheinlichkeitsmaß $d\mathbb{P}_{\Lambda, \alpha}^{\hat{u}, \hat{\phi}}(\hat{g})$ auf $\Omega_{\partial \Lambda}^0(U(1))$, so daß für $j \in \Omega_{\Lambda}^1(Z)$, $q_i \in \Omega_{\Lambda}^0(\mathbb{N}_0)$, $q = q_1 - q_2 - d^* j$ und eichinvariante Observable f in Λ gilt:

$$\begin{aligned}
 \text{i)} \quad & E_{\lambda, \alpha} (U^{\dot{\lambda}} \phi^q \bar{\phi}^{\bar{q}} | \hat{U}, \hat{\phi}) \\
 &= \int dS_{\lambda, \alpha}^{\hat{U}, \hat{\phi}}(\hat{g}) E_{\lambda, \alpha=0} (U^{\dot{\lambda}} \phi^q \bar{\phi}^{\bar{q}} | \hat{U} d\hat{g}, \hat{g}^{-1} \hat{\phi}) E_{\lambda, \alpha}^{\text{Spin}}(g^q | \hat{g}) \\
 \text{ii)} \quad & E_{\lambda, \alpha} (f | \hat{U}, \hat{\phi}) = \int dS_{\lambda, \alpha}^{\hat{U}, \hat{\phi}}(\hat{g}) E_{\lambda, \alpha=0} (f | \hat{U} d\hat{g}, \hat{g}^{-1} \hat{\phi})
 \end{aligned}$$

Bemerkung: Die Bemerkung nach Satz 2.2 gilt hier analog.

Beweis:

Der Beweis verläuft genauso wie der von Satz 2.2. Wir setzen die Eins ein in der Form ^(*)

$$1 = \int D_{\lambda} \hat{g} D_{\lambda} g \delta_{\lambda}(g \hat{g}^{-1}) \delta((d_{\lambda}^* U)(d_{\lambda}^* d_{\lambda} g)) \quad (3.10)$$

und führen dann die Variablentransformation $U' = U d_{\lambda} g$, $\phi' = g^{-1} \phi$ durch. Dies ergibt:

$$\begin{aligned}
 & E_{\lambda, \alpha} (U^{\dot{\lambda}} \phi^q \bar{\phi}^{\bar{q}} | \hat{U}, \hat{\phi}) \\
 &= \int D_{\lambda} \hat{g} Z_{\lambda, \alpha}(\hat{U}, \hat{\phi})^{-1} Z_{\lambda, \alpha=0}(\hat{U} d\hat{g}, \hat{g}^{-1} \hat{\phi}) E_{\lambda, \alpha=0} (U^{\dot{\lambda}} \phi^q \bar{\phi}^{\bar{q}} | \hat{U} d\hat{g}, \hat{g}^{-1} \hat{\phi}) \\
 & \quad \int D_{\lambda} g \delta_{\lambda}(g \hat{g}^{-1}) g^q \exp [S_{gf, \lambda, \alpha}(d^* d g)]
 \end{aligned}$$

Hieraus folgt die Behauptung mit

$$dS_{\lambda, \alpha}^{\hat{U}, \hat{\phi}}(\hat{g}) = \frac{Z_{\lambda, \alpha=0}(\hat{U} d\hat{g}, \hat{g}^{-1} \hat{\phi}) Z_{\lambda, \alpha}^{\text{Spin}}(\hat{g})}{Z_{\lambda, \alpha}(\hat{U}, \hat{\phi})} D_{\lambda} \hat{g}$$

Füreichinvariante f erhalten wir analog sofort die Aussage ii), und indem wir $f = 1$ wählen, sehen wir, daß $dS_{\lambda, \alpha}^{\hat{U}, \hat{\phi}}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist. $\square$

Bemerkung: Wem (3.10) zu heuristisch ist, der kann stattdessen benutzen, daß die Abbildung

$$\ker d_{\lambda}^* \times \mathcal{G}_{\lambda} \longrightarrow \Omega_{\lambda}^1(U(1)), \quad (U, g) \longmapsto U d_{\lambda} g$$

ein Epimorphismus ist und folglich das normierte Haarmaß $D_{\lambda} U \delta(d_{\lambda}^* U) d_{\lambda} g$ hierdurch auf das normierte Haarmaß $D_{\lambda} U$ der Bildgruppe abgebildet wird.

(*) siehe (3.1). Es tritt hier keine Determinante auf, da der Wert $d_{\lambda}^* d_{\lambda} g = 1$ genau $(\det \Delta_{\lambda}^{\text{NC}})$ -mal angenommen wird.

Um Abwesenheit spontaner Symmetriebrechung zunächst für Glob (Theorem 3.6) und dann für Grib (Theorem 3.8) zu zeigen, konzentrieren wir uns jetzt wie im nicht-kompakten Fall auf das (fast) abfaktorisierte Spinmodell. Der einzige Unterschied ist, daß wir statt eines Gauß'schen Modells nun kompakte $U(1)$ -Spinvariablen erhalten. Sei

$$\langle g^q \rangle_{\alpha}^{\text{Spin}} := \lim_{\Lambda \uparrow \Lambda^{\infty}} E_{\Lambda, \alpha}^{\text{Spin}} (g^q | \mathbb{1})$$

Nach Korrelationsungleichungen^(*) von [Messenger et al. 1978] existiert der thermodynamische Limes und ist translationsinvariant. Außerdem folgt auch

$$| E_{\Lambda, \alpha}^{\text{Spin}} (g^q | \hat{g}) | \leq E_{\Lambda, \alpha}^{\text{Spin}} (g^q | \mathbb{1}) \quad (3.11)$$

Wir erhalten hiermit analog zu Korollar 2.3:

Korollar 3.5: Im thermodynamischen Limes gilt für jeden Gibbs-Zustand $\langle \cdot \rangle_{\alpha}$ zur kompakten Wirkung $S_{\alpha} \equiv S_{\text{inv}} + S_{\text{gf}, \alpha}$, der der Stabilitätsbedingung (2.4) genügt:

$$| \langle U^j \phi^{q_1} \bar{\phi}^{q_2} \rangle_{\alpha} | \leq \langle R^{q_1 + q_2} \rangle_{\alpha} \langle g^q \rangle_{\alpha}^{\text{Spin}}$$

Beweis:

Mit (3.11) gilt zunächst in jedem endlichen Volumen Λ , das die Träger von j und q_1 enthält:

$$\begin{aligned} & | E_{\Lambda, \alpha} (U^j \phi^{q_1} \bar{\phi}^{q_2} | \hat{u}, \hat{\phi}) | \\ & \leq \int d\mathcal{S}_{\Lambda, \alpha}^{\hat{u}, \hat{\phi}}(\hat{g}) | E_{\Lambda, \alpha=0} (U^j \phi^{q_1} \bar{\phi}^{q_2} | \hat{u} d\hat{g}, \hat{g}^{-1} \hat{\phi}) | E_{\Lambda, \alpha}^{\text{Spin}} (g^q | \mathbb{1}) \\ & \leq E_{\Lambda, \alpha}^{\text{Spin}} (g^q | \mathbb{1}) \int d\mathcal{S}_{\Lambda, \alpha}^{\hat{u}, \hat{\phi}}(\hat{g}) E_{\Lambda, \alpha=0} (R^{q_1 + q_2} | \hat{u} d\hat{g}, \hat{g}^{-1} \hat{\phi}) \\ & = E_{\Lambda, \alpha}^{\text{Spin}} (g^q | \mathbb{1}) E_{\Lambda, \alpha} (R^{q_1 + q_2} | \hat{u}, \hat{\phi}) \end{aligned}$$

Nun führen wir auf beiden Seiten den thermodynamischen Limes durch (oder benutzen die DLR-Gleichungen) und erhalten die Behauptung. $\blacksquare$

(*) Die Korrelationsungleichungen gelten übrigens auch für Modelle mit Villain-Wirkung [Borgs, Nill, unveröffentlicht].

Theorem 3.6: Im abelschen kompakten Higgsmodell auf dem Gitter ist in $2 \leq d \leq 4$ Dimensionen jeder Gibbs-Zustand $\langle \cdot \rangle_\alpha$ zu den eichfixierten Wirkungen S_α (1.25 + 1.26), der der Stabilitätsbedingung (2.4) genügt, invariant unter globalen Eichtransformationen, falls $\alpha > 0^{(*)}$.

Beweis:

Nach ähnlichen Vorbemerkungen wie im Beweis von Theorem 2.4 bleibt zu zeigen, daß

$$\langle g^q \rangle_\alpha^{\text{Spin}} = 0$$

falls $q \in C^0(Z)$ und $\sum_x q(x) \neq 0$. Hierzu wählen wir $a \in Z^d$ und definieren

$$q_a(x) := q(x-a)$$

Abermals nach Korrelationsungleichungen von [Messenger et al. 1978] gilt

$$\begin{aligned} \langle g^{(2q - q_a - q_{-a})} \rangle_\alpha^{\text{Spin}} &\geq \langle g^{q - q_a} \rangle_\alpha^{\text{Spin}} \langle g^{q - q_{-a}} \rangle_\alpha^{\text{Spin}} \\ &\geq (\langle g^q \rangle_\alpha^{\text{Spin}})^2 \langle g^{-q_a} \rangle_\alpha^{\text{Spin}} \langle g^{-q_{-a}} \rangle_\alpha^{\text{Spin}} \\ &= |\langle g^q \rangle_\alpha^{\text{Spin}}|^4 \end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichung aus der Translationsinvarianz von $\langle \cdot \rangle_\alpha^{\text{Spin}}$ folgt.

Es genügt also zu zeigen, daß

$$\lim_{|a| \rightarrow \infty} \langle g^{P_a(q)} \rangle_\alpha^{\text{Spin}} = 0 \quad (3.12)$$

für

$$P_a(q) = 2q - q_a - q_{-a}$$

und

$$\sum_x q(x) \neq 0$$

Zum Beweis von (3.12) gehen wir vor wie in [Borgs, Nill 1986a], d.h. wir imitieren die Technik der komplexen Translation aus dem Beweis des Mermin-Wagner Theorems für das XY-Modell von [Mc Bryan, Spencer 1977] und erhalten

Lemma 3.7: Sei $q \in C^0(Z)$, $\sum_x q(x) \neq 0$ und $P_a := 2q - q_a - q_{-a}$. Dann gilt in $3 \leq d \leq 4$ Dimensionen

$$\langle g^{P_a} \rangle_\alpha^{\text{Spin}} \leq \exp[-K(\alpha) (P_a, \bar{\Delta}^2 P_a)]$$

wobei $K(\alpha) > 0$ von $a \in Z^d$ unabhängig ist.

(*) In [Borgs, Nill 1986 a] wurde dies für $d = 4$ gezeigt.

Hieraus folgt die Behauptung (3.12) für $d=3,4$, da in $d \leq 4$ $(P_a, \Delta^{-2} P_a)$ für $|a| \rightarrow \infty$ divergiert, wie man sich durch Fourier-Transformation leicht überlegen kann. Lemma (3.7) ist in Anhang B bewiesen, ebenso wie Theorem 3.6 für den Fall $d=2$.

Hiermit ist also gezeigt, daß genauso wie im nicht-kompakten Modell die globale Symmetrie Glob in $2 \leq d \leq 4$ für alle $\alpha > 0$ ungebrochen ist. Falls α groß genug ist, wissen wir aber auch, daß sogar Grib ungebrochen ist:

Theorem 3.8: [Borgs, Nill 1986 a] Jeder Gibbs-Zustand $\langle \cdot \rangle_\alpha$ des kompakten Modells wie in Theorem 3.6 ist invariant unter Grib, falls α groß genug ist.

Beweis:

Mit Korollar 3.5 und Lemma 3.2 bleibt zu zeigen, daß für alle $q \in C^0(Z)$ mit $q \notin \Delta^{-1}(C^0(Z))$ gilt

$$\langle g^q \rangle_\alpha^{\text{Spin}} = 0 \quad (3.13)$$

falls α groß genug ist. Nun ist Grib aber auch eine Symmetriegruppe des Spinmodells gemäß

$$g \mapsto gh, \quad h \in \text{GRIB}$$

und (3.13) folgt daher, falls Grib im Spinmodell ungebrochen ist. Für große α ist dies jedoch eine Standardfolge aus der Konvergenz der üblichen Hochtemperatur-Clusterentwicklung, wie ich hier nur schematisch andeuten will. Setze (*)

$$1 + S_x := \exp \left[\frac{1}{\alpha} \cos(d^* d\chi)_x \right]$$

Dies ergibt für die Wirkung in Λ (NB: $g = e^{i\chi}$)

$$\exp S_{gf, \Lambda, \alpha} = \sum_{\Gamma \subset \Lambda} \prod_{x \in \Gamma} S_x$$

Wir zerlegen Γ in seine Zusammenhangskomponenten (2 Punkte heißen hier zusammenhängend, falls sie durch höchstens 2 zusammenhängende Bonds verbunden werden können) und erhalten schließlich für die Zustandssumme

$$Z_{\Lambda, \alpha}^{\text{Spin}}(0) = 1 + \sum_{\substack{\Gamma \subset \Lambda \\ \Gamma \neq \emptyset}} \prod_{\gamma \subset \Gamma} S_\gamma z_\Lambda(\gamma, 0)$$

(*) Ich benütze der Einfachheit halber die Eichfixierung (1.27a). Das Argument für (1.27b) geht analog.

Die entsprechende Entwicklung für den unnormierten Erwartungswert $Z_{\Lambda, \alpha}^{\text{Spin}}(q) = Z_{\Lambda, \alpha}^{\text{Spin}}(0) E_{\Lambda, \alpha}(g^q | 1)$ liefert (vgl. 2.27)

$$Z_{\Lambda, \alpha}^{\text{Spin}}(q) = \sum_{\Gamma \subset \Lambda_0} Z_{\Lambda}(\Gamma, q) \prod_{\delta \in \Gamma \setminus \Gamma_0} Z_{\Lambda}(\delta, 0)$$

wobei Γ_q das maximale q-Polymer in Γ bezeichnet und $\prod$ jeweils das Produkt über die Zusammenhangskomponenten ist. q-Polymere sind hierbei entweder leer oder Vereinigungen von gewöhnlichen Polymeren (= nicht-leere zusammenhängende Teilmengen von Λ_0), die alle mit $\text{supp } q$ zusammenhängen. Die Aktivitäten $Z_{\Lambda}(\delta, q)$ sind Null, falls $\delta \not\subset \Lambda$ und falls $\delta \subset \Lambda$

$$Z_{\Lambda}(\delta, q) = \int D_{\Lambda} g \ g^q \prod_{x \in \delta} S_x \quad (3.14)$$

Da $\|S\|_{\infty} \leq e^{\frac{1}{\alpha}} - 1$ für große α beliebig klein wird, können wir

$$Z_{\Lambda}(\delta, q) \leq e^{-M|\delta|}$$

abschätzen, wobei $M = -\ln \|S\|_{\infty}$ mit wachsendem α beliebig groß wird. Die zu (2.31) analoge Clusterentwicklung für den Erwartungswert konvergiert daher und liefert (*)

$$E_{\Lambda, \alpha}(g^q | 1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\delta_1, \dots, \delta_n} \Phi_c(\delta_1, \dots, \delta_n) \prod_{i=1}^n Z_{\Lambda}(\delta_i, \nu(\delta_i)q) \quad (3.15)$$

wobei die Summe $\sum'$ über alle n-Tupel von Polymeren $(\delta_1, \dots, \delta_n)$ geht, die genau ein q-Polymer enthalten. Falls jedoch g^q nicht invariant unter Grib ist, verschwindet die Aktivität eines q-Polymers nur dann nicht, wenn es mit $\partial\Lambda$ zusammenhängt (andernfalls ist das Maß $D_{\Lambda} g \ S^{\delta}$ in (3.14) invariant unter Grib). Der Erwartungswert $E_{\Lambda, \alpha}(g^q, 1)$ fällt daher exponentiell mit dem Abstand zwischen $\text{supp } q$ und dem Rand von Λ , falls α groß genug ist, und damit folgt die Behauptung. $\blacksquare$

Ich möchte noch ein paar Überlegungen anfügen, die erklären sollen, warum ich überzeugt bin, daß Grib sogar für alle $\alpha > 0$ ungebrochen ist. Üblicherweise gehen in Spinsystemen mit lokalen Wechselwirkungen Phasenübergänge immer einher mit Nichtanalytizitäten der freien Energiedichten als Funktion der Kopplungskonstanten (s. [Pfister 1982] für eine präzisere Aussage).

(*) $() = 1$ für q-Polymere und $() = 0$ sonst.

Für den Zustand $\langle . \rangle_{\alpha}^{\text{Spin}}$ ergibt sich die freie Energiedichte zu

$$F_{\alpha} := \lim_{\Lambda \uparrow \Lambda^{\infty}} - \frac{1}{|\Lambda_0|} \log Z_{\Lambda, \alpha}^{\text{Spin}}(1) \quad (3.16)$$

wobei $|\Lambda_0|$ die Anzahl der Punkte in Λ_0 bezeichnet. Zur Erinnerung sei angemerkt, daß $Z_{\Lambda, \alpha}^{\text{Spin}}(1)$ die Zustandssumme im $U(1)$ -Spinmodell mit Wirkung $(*) S_{gf, \Lambda, \alpha}(d^* dg)$ und Randbedingung $g = 1$ auf $\partial\Lambda_0 \cap \partial\hat{\Lambda}$ ist.

Satz 3.9:
$$F(\alpha) = - \log \left[\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\chi}{2\pi} e^{\frac{i}{2} \cos \chi} \right]$$

Insbesondere ist also $F(\alpha)$ analytisch in einer Umgebung der positiven reellen Halbachse, so daß sich hiermit kein Anzeichen für einen Phasenübergang in den Zuständen $\langle . \rangle_{\alpha}^{\text{Spin}}$ für $\alpha > 0$ ergibt.

Beweis:

Ich zeige die Aussage im 1. Schritt zunächst für

$$F_{\text{frei}}(\alpha) := \lim_{\Lambda \uparrow \Lambda^{\infty}} - \frac{1}{|\Lambda_0|} \log Z_{\Lambda, \alpha, \text{frei}}^{\text{Spin}} \quad (3.17)$$

wobei $Z_{\Lambda, \alpha, \text{frei}}^{\text{Spin}}$ die Zustandssumme mit freien Randbedingungen ist. Die Behauptung folgt dann im 2. Schritt aus der Tatsache, daß die freie Energiedichte von Randbedingungen unabhängig ist und insbesondere gilt:

$$F(\alpha) = F_{\text{frei}}(\alpha) \quad (3.18)$$

Sei $\Lambda \subset \Lambda^{\infty}$ wieder endlich und offen und $\hat{\Lambda} \subset \Lambda_0$ die Menge aller Punkte, die nicht durch nur einen Bond aus Λ_1 mit $(\partial\Lambda)_0$ verbunden werden können.

Ferner sei für $g \in U(1)$ $\text{Re}(g)$ der Realteil von g . Dann gilt

$$Z_{\Lambda, \alpha, \text{frei}}^{\text{Spin}} = \int D_1 g \ e^{\frac{i}{2} \sum_{x \in \hat{\Lambda}} \text{Re}(d_{\Lambda}^* d_1 g)_x} \quad (3.19)$$

Man beachte, daß für offene Λ die Definition von $d_{\Lambda}^* d_{\Lambda}$ die Randbedingung $g(x) = 1$ für $x \in (\partial\Lambda)_0$ impliziert. Da jedoch $\hat{\Lambda}$ weit genug von $(\partial\Lambda)_0$

(*) Ich beschränke mich hier der Einfachheit halber wieder auf (1.27a), d.h. $S_{gf, \Lambda, \alpha} = \alpha^{-1} \sum_{x \in \hat{\Lambda}} \cos(d^* d\chi)_x$, $g = e^{i\chi}$. Satz 3.9 gilt mit den offensichtlichen Änderungen aber auch für die Eichfixierung (1.27b).

entfernt ist, ist (3.19) eine mögliche Darstellung der Zustandssumme in $\hat{\Lambda}$ mit freien Randbedingungen. Nun beachten wir die im Beweis von Lemma 3.1 bereits erwähnte Tatsache, daß für offene Λ die Abbildung

$$d_{\Lambda}^* d_{\Lambda} : \mathcal{G}_{\Lambda} \longrightarrow \mathcal{G}_{\Lambda}$$

ein Epimorphismus ist und normierte Haarmaße unter Epimorphismen in normierte Haarmaße übergehen. Folglich

$$\begin{aligned} Z_{\hat{\Lambda}, \alpha, \text{frei}}^{\text{Spin}} &= \int \mathcal{D}_{\Lambda} g \, e^{\frac{1}{\alpha} \sum_{x \in \hat{\Lambda}} \text{Re}(g(x))} \\ &= \left[\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\chi}{2\pi} e^{\frac{1}{\alpha} \cos \chi} \right]^{|\hat{\Lambda}|} \end{aligned} \quad (3.20)$$

Hieraus folgt Satz 3.9 unmittelbar für $F_{\text{frei}}(\alpha)$. Es bleibt (3.18) zu zeigen. Ich schreibe die Zustandssumme in Λ für allgemeine Randbedingungen $\hat{g}$ auf $\partial\Lambda \cup \partial\hat{\Lambda}$ in der Form^(*)

$$Z_{\Lambda, \alpha}^{\text{Spin}}(\hat{g}) = \int \mathcal{D}_{\Lambda} g \, e^{\frac{1}{\alpha} \sum_{x \in \Lambda} \text{Re}(d_{\Lambda}^* d_{\Lambda} g)_x} \, e^{\frac{1}{\alpha} \sum_{x \in \hat{\Lambda}_0 \cup \hat{\Lambda}} \text{Re}(d^* d \bar{g}(g, \hat{g}))_x}$$

Hierbei ist

$$\bar{g}(g, \hat{g})(x) := \begin{cases} g(x) & , \quad x \in \Lambda_0 \\ \hat{g}(x) & , \quad x \notin \Lambda_0 \end{cases}$$

Wir erhalten also den Quotienten $Z_{\Lambda, \alpha}^{\text{Spin}}(\hat{g}) / Z_{\Lambda, \alpha, \text{frei}}^{\text{Spin}}$ als einen Erwartungswert von

$$\exp \frac{1}{\alpha} \sum_{x \in \hat{\Lambda}_0 \cup \hat{\Lambda}} \text{Re}(d^* d \bar{g})_x$$

Wegen $-1 \leq \text{Re}(g) \leq 1$ folgt

$$e^{-\frac{|\hat{\Lambda}_0 \cup \hat{\Lambda}|}{\alpha}} \leq Z_{\Lambda, \alpha}^{\text{Spin}}(\hat{g}) / Z_{\Lambda, \alpha, \text{frei}}^{\text{Spin}} \leq e^{+\frac{|\hat{\Lambda}_0 \cup \hat{\Lambda}|}{\alpha}}$$

(*) Zur Erinnerung der Definition von $\hat{\Lambda}$ siehe Fig. 1. (S. 23)

Wegen

$$\lim_{\lambda \uparrow \lambda^\infty} \frac{|\hat{\lambda}_\bullet \setminus \hat{\lambda}|}{|\lambda_\bullet|} = 0$$

und

$$\lim_{\lambda \uparrow \lambda^\infty} \frac{|\hat{\lambda}|}{|\lambda_\bullet|} = 1$$

erhalten wir schließlich

$$\lim_{\lambda \uparrow \lambda^\infty} \frac{1}{|\lambda_\bullet|} \log Z_{\lambda, \alpha}^{\text{Spin}}(g) = \lim_{\lambda \uparrow \lambda^\infty} \frac{1}{|\hat{\lambda}|} \log Z_{\lambda, \alpha, \text{frei}}^{\text{Spin}}$$

und damit insbesondere die Behauptung (3.18). $\square$

Eine Idee wie man verallgemeinerte Identitäten wie die zwischen (3.19) und (3.20) in einer verfeinerten Clusterentwicklung für $\langle g \rangle_\alpha^{\text{Spin}}$ anwenden könnte, will ich hier nur kurz skizzieren. Wir addieren o.B.d.A. zur Wirkung $S_{gf}(d^* dg)$ die Konstante $F(\alpha)$, wobei

$$e^{-F(\alpha)} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\chi}{2\pi} e^{\frac{1}{\alpha} \cos \chi}$$

und definieren dann

$$1 + S_x(d^* dg) := e^{\frac{1}{\alpha} \text{Re}(d^* dg)_x + F(\alpha)}$$

Dies hat den Effekt, daß die Aktivität $z_\lambda(\gamma, q)$ (3.14) auch für $q = 0$ verschwindet, falls γ nicht mit dem Rand $\partial\lambda$ zusammenhängt. In der Tat können wir dann

$$\prod_{x \in \gamma} S_x = f_\gamma(d_\lambda^* d_\lambda g)$$

schreiben und die Identität

$$\int_{D_\lambda g} f_\gamma(d_\lambda^* d_\lambda g) = \int_{D_\lambda g} f_\gamma(g)$$

anwenden. Das letzte Integral faktorisiert jedoch und wir erhalten

$$\prod_{x \in \gamma} \int dg_x (e^{\frac{1}{\alpha} \text{Re}(g_x) + F(\alpha)} - 1) = 0$$

Das heißt also, daß in der (3.15) entsprechenden Clusterentwicklung überhaupt nur Polymere auftreten, die mit dem Rand $\partial\lambda$ zusammenhängen. Man müßte nun für eine derartig spezifizierte Clusterentwicklung verschärfte Konvergenzkriterien herleiten, um zu garantieren, daß $E_{\lambda, \alpha}(g^q | 1)$ auch für beliebige $\alpha > 0$ im thermodynamischen Limes gegen Null konvergiert. Die Frage, ob dies

tatsächlich möglich ist, werde ich in dieser Arbeit leider nicht mehr beantworten können.

Abschließend möchte ich erwähnen, daß die Theoreme 3.6 und 3.8 auch für jeden Zustand $\langle \cdot \rangle_{\alpha, J_\nu \rightarrow 0}$ gelten, der sich als Limes $\nu \rightarrow \infty$ von Gibbs-Zuständen zu äußeren Feldern $J_\nu \rightarrow 0$ ergibt und die Stabilitätsbedingung (2.4) erfüllt. Hierzu zeigt man analog zu (2.8)

$$| \langle u^i \phi^{q_1} \bar{\phi}^{q_2} \rangle_{\alpha, J_\nu \rightarrow 0} | \leq \langle R^{q_1+q_2} \rangle_{\alpha, J_\nu \rightarrow 0} \langle g^i \rangle_{\alpha}^{Spin} \quad (3.21)$$

Der Beweis von (3.21) geht mit den offensichtlichen Änderungen ganz genauso wie der von Theorem 2.5 und sei hier daher unterschlagen. Der interessierte Leser kann ihn auch in [Borgs, Nill 1986 a] nachlesen.

Hiermit beende ich die Untersuchungen zur spontanen Symmetriebrechung für $\alpha > 0$ und wende mich dem Fall $\alpha = 0$ zu, d.h. dem kompakten Analogon zur Landau-Eichung.

3.2 Die Landau-Eichung in kompakten $U(1)$ -Modellen

Vorweg möchte ich feststellen, daß es nicht möglich ist, die Idee von Kennedy und King auf das kompakte Modell zu übertragen. Der Grund liegt, wenn man so will, abermals in der Existenz von Gribov-Kopien oder - präziser ausgedrückt - in der Existenz nicht-trivialer harmonischer 0-Formen mit Werten in $U(1)$. Dies bedeutet, daß man Funktionen der Felder in "Landau-Eichung" (d.h. $d^*U = 1$) nur dann als entsprechende Einschränkung eichinvarianter Funktionen auf dem Raum aller Felder auffassen kann, wenn sie invariant unter der Gruppe der $U(1)$ -wertigen harmonischen 0-Formen, also unter Grib sind. Dies ist jedoch unabhängig von Randbedingungen weder für $\Phi(x)$ noch für $\bar{\Phi}(x)\Phi(y)$ ($x \neq y$) der Fall. Um also die für eine analytische (und übrigens auch numerische) Untersuchung extrem hinderliche Zwangsbedingung der Landau-Eichung ($(d^*U)(x) = 1, \forall x \in \Lambda_0$) loszuwerden, können wir uns hier nicht auf eichinvariante Erwartungswerte zurückziehen. Als Ausweg schlage ich einen ähnlichen Trick wie den zur Herleitung von (3.20) vor. Ich führe neue, dynamische Plakettenvariablen

$$V \in \Omega_{\Lambda}^2(U(1))$$

d.h. Feldkonfigurationen $\Lambda_2 \ni p \mapsto V(p) \in U(1)$ ein, und schreibe die ursprünglichen Eichfelder U als

$$U = d_{\Lambda}^* V \quad (3.22)$$

In der Notation $U = e^{iA}$, $V = e^{iF}$ wäre der Zusammenhang also

$$A = d_{\Lambda}^{*NC} F \pmod{2\pi}$$

Als unmittelbare Konsequenz der Darstellung (3.22) erhalten wir

$$d_{\Lambda}^* U = 1$$

d.h. die solchermaßen gebildeten Eichfelder U erfüllen automatisch die Zwangsbedingung der Landau-Eichung. Nun müssen wir noch das Haarmaß $D_{\Lambda}U \propto \delta(d_{\Lambda}^*U)$ auf $\text{Ker } d_{\Lambda}^* \cap \Omega_{\Lambda}^1(U(1))$ durch ein entsprechendes Maß für die V 's ersetzen. Da wir aber nur Funktionen der U 's, also Funktionen von d_{Λ}^*V integrieren wollen, genügt uns jedes Maß auf $\Omega_{\Lambda}^2(U(1))$, dessen Bild unter der Abbildung

$$d_{\Lambda}^* : \Omega_{\Lambda}^2(U(1)) \rightarrow \Omega_{\Lambda}^1(U(1)) \quad (3.23)$$

gerade mit $D_\Lambda U \int (d_\Lambda^* U)$ übereinstimmt. Wenn wir also Λ mit trivialer Homologie wählen, so ist

$$\begin{aligned} d_\Lambda^* (\Omega_\Lambda^2(U(1))) &= \text{Ker } d_\Lambda^* \cap \Omega_\Lambda^1(U(1)) \\ &=: \mathcal{U}_{\text{Landau}} \end{aligned}$$

und daher die Abbildung (3.23)

$$d_\Lambda^* : \Omega_\Lambda^2(U(1)) \longrightarrow \mathcal{U}_{\text{Landau}} \subset \Omega_\Lambda^1(U(1))$$

ein Epimorphismus auf den Raum $\mathcal{U}_{\text{Landau}}$ der Felder in Landau-Eichung. Nun benutzen wir wieder die elementare Tatsache, daß normierte Haarmaße unter stetigen Epimorphismen in die normierten Haarmaße auf den Bildgruppen abgebildet werden und verwenden daher als Maß für die V 's einfach das normierte Haarmaß auf $\Omega_\Lambda^2(U(1))$, d.h. das Produktmaß über alle Plaketten

$$D_\Lambda V \equiv \prod_{P \in \Lambda_Z} dV_P$$

von normierten Haarmaßen dV_P auf $U(1)$. Der Erwartungswert einer Funktion $f(U, \phi)$ in Landau-Eichung schreibt sich daher als

$$\langle f \rangle_{\Lambda, \text{Landau}} = Z_\Lambda^{-1} \int D_\Lambda V D_\Lambda \phi f(d_\Lambda^* V, \phi) e^{S_{\Lambda, \text{inv}}(d_\Lambda^* V, \phi)} \quad (3.24)$$

wobei die Notation bedeutet, daß wir in f und $S_{\Lambda, \text{inv}}$ jedes U durch $d_\Lambda^* V$ zu ersetzen haben. Hiermit sind wir nun in der Lage, die Frage der spontanen Symmetriebrechung in Landau-Eichung zu diskutieren. Zunächst will ich die Identität (3.24) auf allgemeine Gibbszustände verallgemeinern.

Theorem 3.10: Sei $S_{\text{inv}}(U, \phi)$ eine der Wirkungen (1.25) des kompakten Modells. Die Menge $\{ \langle . \rangle_{\text{plaq}} \}$ der Gibbszustände auf $\mathcal{L}^2(U(1)) \times \Omega^0(\mathcal{C})$ zur Wirkung $S_{\text{inv}}(d_\Lambda^* V, \phi)$ wird durch d_2^*

$$d_2^* : \Omega^2(U(1)) \times \Omega^0(\mathcal{C}) \ni (V, \phi) \longmapsto (d_\Lambda^* V, \phi) \in \Omega^1(U(1)) \times \Omega^0(\mathcal{C})$$

bijektiv abgebildet auf die Menge $\{ \langle . \rangle_{\text{Landau}} \}$ der Gibbszustände des kompakten Modells auf $\Omega^1(U(1)) \times \Omega^0(\mathcal{C})$ in Landau-Eichung.

Beweis:

Vom mathematischen Standpunkt aus betrachtet sind Gibbszustände Wahrscheinlichkeitsmaße auf der von den Zylindermengen erzeugten $\mathcal{G}$ -Algebra^(*). Da das Urbild einer Zylindermenge in $\Omega^1(U(1)) \times \Omega^0(\mathcal{C})$ unter der Abbildung d_2^* klarerweise eine Zylindermenge in $\Omega^2(U(1)) \times \Omega^0(\mathcal{C})$ ist, ist d_2^* eine meßbare Abbildung, und die Aussage macht daher insofern Sinn. Ich zeige als erstes, daß jeder Gibbszustand $\langle \cdot \rangle_{\text{plaq}}$ auf $\Omega^2(U(1)) \times \Omega^0(\mathcal{C})$ zur Wirkung $S_{\text{inv}} \circ d_2^*$ auch tatsächlich auf einen Gibbszustand des kompakten Eichmodells in Landau-eichung abgebildet wird. Hierzu sei $f(U, \phi)$ eine beliebige Zylinderfunktion (d.h. meßbare Funktion von nur endlich vielen Variablen $U(b)$ und $\phi(x)$, $(b, x) \in \Lambda_1^\infty \times \Lambda_0^\infty$). Wir wollen zeigen, daß der Zustand

$$\langle f \rangle_{\text{Lan}} := \langle f \circ d_2^* \rangle_{\text{plaq}} \quad (3.25)$$

die richtigen DLR-Gleichungen erfüllt:

$$\langle f \rangle_{\text{Lan}} = \langle E_{\Lambda, \text{Lan}}(f | \hat{U}, \hat{\phi}) \rangle_{\text{Lan}} \quad (3.26)$$

wobei wir uns o.E. auf rechteckige abgeschlossene Λ beschränken dürfen, da jedes andere Λ in einem solchen enthalten ist. Da $\langle \cdot \rangle_{\text{plaq}}$ die entsprechenden DLR-Gleichungen zur Wirkung $S_{\text{inv}} \circ d_2^*$ erfüllt, gilt

$$\langle f \rangle_{\text{Lan}} = \langle E_{\Lambda, \text{plaq}}(f \circ d_2^* | \hat{V}, \hat{\phi}) \rangle_{\text{plaq}}$$

wobei

$$E_{\Lambda, \text{plaq}}(f \circ d_2^* | \hat{V}, \hat{\phi}) := \frac{1}{Z_\Lambda(\hat{V}, \hat{\phi})} \int \mathcal{D}_\Lambda V \mathcal{D}_\Lambda \phi f(d^*(V \hat{V}_\Lambda, \phi + \hat{\phi}_\Lambda)) e^{S_{\Lambda, \text{inv}}(d^*(V \hat{V}_\Lambda), \phi + \hat{\phi}_\Lambda)} \quad (3.27)$$

Hierbei fassen wir die Randbedingungen $\hat{V}$ und $\hat{\phi}$ zunächst als vorgegebene Konfigurationen auf ganz Λ^∞ auf und bezeichnen die entsprechenden Einschränkungen auf das Komplement $\Lambda^c := \Lambda^\infty \setminus \Lambda$ mit $\hat{V}_{\Lambda^c}$ bzw. $\hat{\phi}_{\Lambda^c}$. Es bedeutet dann

$$(V \hat{V}_{\Lambda^c})(p) := \begin{cases} V(p) & , \quad p \in \Lambda_2 \\ \hat{V}(p) & , \quad p \in \Lambda_2^c \end{cases}$$

(*) Zylindermengen sind Urbilder von Borelmengen unter der Projektion

$\pi_\Lambda : \Omega_{\Lambda^\infty} \rightarrow \Omega_\Lambda$ auf die Menge der Felder in einem endlichen Volumen .

und entsprechendes für $\phi + \phi_{\Lambda^c}$. Zur Berechnung der Wirkung $S_{\hat{\Lambda}, \text{inv}}$ in (3.27) müssen wir $\hat{\Lambda} \supset \Lambda$ groß genug (aber ansonsten beliebig) wählen, so daß die Wirkung in $\Lambda^\infty \setminus \hat{\Lambda}$ nicht mehr von den Variablen V und ϕ aus Λ abhängt. Die Zustandsumme $Z_{\Lambda}(\hat{V}, \hat{\phi})$ ist dann ebenfalls mit $S_{\hat{\Lambda}, \text{inv}}$ zu berechnen.

Zum Nachweis von (3.26) genügt es nun zu zeigen, daß

$$E_{\Lambda, \text{reg}}(f \cdot d_2^* \mid \hat{V}, \hat{\phi}) = E_{\Lambda, \text{Lan}}(f \mid d_2^*(\hat{V}, \hat{\phi})) \quad (3.28)$$

für Λ endlich, abgeschlossen und rechteckig. Im folgenden ist es wichtig zu beachten, daß in DLR-Gleichungen für d und d^* immer die entsprechenden Definitionen im unendlichen Volumen zu nehmen sind. Die weiteren Überlegungen dienen in erster Linie der Frage, wann wir stattdessen d_{Λ} und d_{Λ}^* verwenden dürfen, um dann Identitäten wie in (3.24) benützen zu können. Hierzu ist es zweckmäßig, $\mathcal{U}$ -Formen mit Werten in $U(1)$ (bzw. $\mathbb{C}$), die nur auf Teilmengen von Λ^∞ definiert sind, von jetzt ab zu identifizieren mit ihren entsprechenden Erweiterungen durch den Wert 1 (bzw. 0) auf dem Rest von Λ^∞ .

Um (3.28) zu zeigen, müssen wir zunächst noch einmal präzise das à-priori Maß in Landau-Eichung definieren, mit dessen Hilfe wir bedingte Erwartungswerte bei allgemeinen Randbedingungen $\hat{U}$ und $\hat{\phi}$ berechnen wollen. Ich betrachte zunächst den Fall $U = 1$ und setze

$$\mathcal{U}_{\Lambda, \text{Lan}} := \{u \in \Omega_{\Lambda}^1(U(1)) \mid d^*u = 1\} \quad (3.29)$$

wobei, wie gesagt, U und d^*U als Konfigurationen auf ganz Λ^∞ aufzufassen sind. $\mathcal{U}_{\Lambda, \text{Lan}}$ ist eine kompakte Lie-Gruppe, und es sei $\omega_{\Lambda, \text{Lan}}$ das normierte Haarmaß auf $\mathcal{U}_{\Lambda, \text{Lan}}$. Falls Λ abgeschlossen ist, gilt übrigens gerade $\mathcal{U}_{\Lambda, \text{Lan}} = \text{Ker } d_{\Lambda}^* \cap \Omega_{\Lambda}^1(U(1))$. Außerdem ist $\mathcal{U}_{\Lambda, \text{Lan}} \subset \mathcal{U}_{\hat{\Lambda}, \text{Lan}}$ für alle $\Lambda \subset \hat{\Lambda}$ eine Untergruppe. Den bedingten Erwartungswert einer Zylinderfunktion $f(U, \phi)$ in Landau-Eichung mit Randbedingung $\hat{U} = 1$ und $\hat{\phi}$ definieren wir nun zu

$$\begin{aligned} E_{\Lambda, \text{Lan}}(f \mid \hat{U} = 1, \hat{\phi}) &:= \\ &= Z_{\Lambda, \text{Lan}}^{-1} \int d\omega_{\Lambda, \text{Lan}}(u) D_{\Lambda} \phi \, f(u \cdot \mathbb{1}_{\Lambda^c}, \phi + \hat{\phi}_{\Lambda^c}) e^{S_{\hat{\Lambda}, \text{inv}}(u \cdot \mathbb{1}_{\Lambda^c}, \phi + \hat{\phi}_{\Lambda^c})} \end{aligned}$$

Für allgemeine Randbedingungen $\hat{U}$ bezeichne nun $\mathcal{U}_{\Lambda, \text{Land}, \hat{U}}$ die Menge aller Eichfeldkonfigurationen, die außerhalb von Λ mit $\hat{U}$ übereinstimmen und auf dem Abschluß $\bar{\Lambda}$ von Λ divergenzfrei sind:

$$\mathcal{U}_{\Lambda, \text{Land}, \hat{U}} := \{ u \in \Omega^1(u|_{\Gamma}) \mid u_{\Lambda^c} = \hat{U}_{\Lambda^c}, (d^*u)_{\bar{\Lambda}} = 1 \} \quad (3.30)$$

Es ist klar, daß das à-Priori Maß in Landau-Eichung auf $\mathcal{U}_{\Lambda, \text{Land}, \hat{U}}$ konzentriert sein sollte. Da wir es im Fall $\mathcal{U}_{\Lambda, \text{Land}, \hat{U}} \neq \emptyset$ als normierten Limes von $D_{\Lambda} \exp S_{\text{gf}}(d^*(U \hat{U}_{\Lambda^c}))$ erhalten wollen, muß es außerdem invariant unter der Gruppe $\mathcal{U}_{\Lambda, \text{Land}}$ sein. Diese Gruppe operiert jedoch, wie man sich leicht überlegen kann, frei und transitiv auf $\mathcal{U}_{\Lambda, \text{Land}, \hat{U}}$ (NB: Für $U_{\Lambda^c} = 1$ ist $(d^*U)_{\bar{\Lambda}} = 1$ äquivalent zu $d^*U = 1$). $\mathcal{U}_{\Lambda, \text{Land}, \hat{U}}$ ist also eine Nebenklasse zur Gruppe $\mathcal{U}_{\Lambda, \text{Land}}$, und das zugehörige invariante à priori Maß ergibt sich daher eindeutig als das entsprechend verschobene Haarmaß. Hiermit werden wir zu folgender Definition geführt:

$$E_{\Lambda, \text{Land}}(f \mid \hat{U}, \hat{\Phi}) \quad (3.31)$$

$$:= \begin{cases} Z_{\Lambda, \text{Land}}(\hat{U}, \hat{\Phi})^{-1} \int d\omega_{\Lambda, \text{Land}}(u) D_{\Lambda} \phi f(u \tilde{U}_{\Lambda}(\hat{U}), \phi + \hat{\Phi}_{\Lambda^c}) e^{S_{\hat{\Lambda}, \text{inv}}(u \tilde{U}(\hat{U}), \phi + \hat{\Phi}_{\Lambda^c})} \\ 0 \end{cases} \quad (\text{falls } \mathcal{U}_{\Lambda, \text{Land}, \hat{U}} = \emptyset)$$

wobei $\tilde{U}_{\Lambda}(\hat{U}) \in \mathcal{U}_{\Lambda, \text{Land}, \hat{U}}$ ein beliebiger Vertreter der Nebenklasse ist. Man beachte, daß die solchermaßen definierten bedingten Erwartungswerte selbst wieder Zylinderfunktionen von $\hat{U}$ und $\hat{\Phi}$ sind, und zudem, wie es sein sollte von den Anteilen $\hat{U}_{\Lambda}$ und $\hat{\Phi}_{\Lambda}$ der Felder in Λ unabhängig sind. Außerdem erfüllen sie die notwendigen DLR-Gleichungen, die sie als legitime Spezifikation bedingter Erwartungswerte eines Gibbszustands ausweisen:

Lemma 3.11: Sei $\Lambda \subset K$. Dann gilt

$$E_{K, \text{Land}}(E_{\Lambda, \text{Land}}(f \mid \cdot) \mid \hat{U}, \hat{\Phi}) = E_{K, \text{Land}}(f \mid \hat{U}, \hat{\Phi})$$

Beweis:

Für $\mathcal{U}_{K, \text{Land}, \hat{U}} = \emptyset$ ist nichts zu zeigen. Sei also $\mathcal{U}_{K, \text{Land}, \hat{U}} = \mathcal{U}_{K, \text{Land}} \cdot \tilde{U}_K(U) \neq \emptyset$.

Dann gilt

$$\begin{aligned}
 E_K(E_{\Lambda}(\rho|\cdot)|\hat{u},\hat{\phi}) \\
 = Z_{K,Lan}(\hat{u},\hat{\phi})^{-1} \int d\omega_{K,Lan}(u) D_K \phi E_{\Lambda,Lan}(\rho|u\tilde{u}_K(\hat{u}),\phi+\hat{\phi}_{K^c}) \\
 e^{S_{\hat{K},inv}(u\tilde{u}_K(\hat{u}),\phi+\hat{\phi}_{K^c})}
 \end{aligned} \tag{3.32a}$$

Zur Berechnung von $E_{\Lambda,Lan}(f|\cdot)$ können wir nun o.E. $\hat{\Lambda} = \hat{K}$ wählen, falls wir die Zustandssumme $Z_{\Lambda,Lan}$ entsprechend definieren. Wir setzen also

$$\begin{aligned}
 E_{\Lambda,Lan}(\rho|u\tilde{u}_K(\hat{u}),\phi+\hat{\phi}_{K^c}) \\
 = Z_{\Lambda,Lan}(u\tilde{u}_K(\hat{u}),\phi+\hat{\phi}_{K^c})^{-1} \int d\omega_{\Lambda,Lan}(u') D_{\Lambda} \phi' \rho(u'\tilde{u}_{\Lambda}(u\tilde{u}_K(\hat{u}),\phi'+(\phi+\hat{\phi}_{K^c})_{\Lambda^c}) \\
 e^{S_{\hat{K},inv}(u'\tilde{u}_{\Lambda}(u\tilde{u}_K(\hat{u})),\phi'+(\phi+\hat{\phi}_{K^c})_{\Lambda^c})}
 \end{aligned} \tag{3.32b}$$

Hierbei haben wir $\mathcal{U}_{\Lambda,Lan,U\tilde{u}_K(\hat{u})} \neq \emptyset$ vorausgesetzt, was wir jedoch durch die Wahl

$$\tilde{u}_{\Lambda}(U\tilde{u}_K(\hat{u})) := U\tilde{u}_K(\hat{u})$$

sofort verifizieren können (NB: $U \in \mathcal{U}_{K,Lan}$). Nachdem wir diese Wahl getroffen haben, führen wir nun in dem iterierten Funktionalintegral (3.32) die Variablentransformation

$$U \mapsto \bar{U} := U^1 U, \quad \phi' \mapsto \phi'' = \phi' - \phi_{\Lambda}$$

durch. Da $U^1 \in \mathcal{U}_{\Lambda,Lan} \subset \mathcal{U}_{K,Lan}$, ist das Maß $d\omega_{K,Lan}^2$ invariant unter dieser Transformation. Wir erhalten also

$$\begin{aligned}
 E_{K,Lan}(E_{\Lambda,Lan}(\rho|\cdot)|\hat{u},\hat{\phi}) = \\
 Z_{K,Lan}(\hat{u},\hat{\phi})^{-1} \int d\omega_{K,Lan}(\bar{u}) D_K \phi \int d\omega_{\Lambda,Lan}(u') D_{\Lambda} \phi'' \rho(\bar{u}\tilde{u}_K(\hat{u}),\phi''+\phi+\hat{\phi}_{K^c}) \\
 e^{S_{\hat{K},inv}(\bar{u}\tilde{u}_K(\hat{u}),\phi''+\phi+\hat{\phi}_{K^c})} Z_{\Lambda,Lan}(\bar{u}\tilde{u}_K(\hat{u}),\phi''+\phi+\hat{\phi}_{K^c}) \\
 e^{S_{\hat{K},inv}(U^{-1}\bar{u}\tilde{u}_K(\hat{u}),\phi+\hat{\phi}_{K^c})}
 \end{aligned}$$

Hierbei haben wir ausgenutzt, daß die Zustandssumme $Z_{\Lambda, \text{Lan}}(U, \Phi)$ von den Variablen U_Λ und Φ_Λ nicht abhängt. Nun führen wir die Transformation

$$\Phi \mapsto \bar{\Phi} = \Phi'' + \Phi$$

durch und erhalten

$$\begin{aligned} &= Z_{K, \text{Lan}}(\hat{u}, \hat{\Phi})^{-1} \int d\omega_{K, \text{Lan}}(\bar{u}) \mathcal{D}_K \bar{\Phi} f(\bar{u} \tilde{u}_K(\hat{u}), \bar{\Phi} + \hat{\Phi}_{K^c}) \\ &\quad e^{S_{\hat{K}, \text{inv}}(\bar{u}, \tilde{u}_K(\hat{u}), \bar{\Phi} + \hat{\Phi}_{K^c})} Z_{\Lambda, \text{Lan}}(\bar{u} \tilde{u}_K(\hat{u}), \bar{\Phi} + \hat{\Phi}_{K^c}) \\ &\quad \int d\omega_{\Lambda, \text{Lan}}(u') \mathcal{D}_\Lambda \Phi'' e^{S_{\hat{K}, \text{inv}}(u'^{-1} \bar{u} \tilde{u}_K(\hat{u}), \bar{\Phi} + \hat{\Phi}_{K^c} - \Phi'')} \end{aligned}$$

Durch eine Transformation $U' \rightarrow U'^{-1}$, $\Phi'' \rightarrow -\Phi''$ erkennen wir, daß das letzte Integral gerade die Zustandssumme $Z_{\Lambda, \text{Lan}}(\bar{u} \tilde{u}_K(\hat{u}), \bar{\Phi} + \hat{\Phi}_{K^c})$ ergibt, so daß wir insgesamt das gewünschte Ergebnis erhalten:

$$= E_{K, \text{Lan}}(f \mid \hat{U}, \hat{\Phi}) \quad \square$$

Mit der Definition (3.31) erhalten wir nun die Identität (3.28) folgendermaßen

$$\begin{aligned} &E_{\Lambda, \text{Log}}(f \circ d_\Lambda^* \mid \hat{V}, \hat{\Phi}) \quad (3.33) \\ &= Z_\Lambda(\hat{V}, \hat{\Phi})^{-1} \int \mathcal{D}_\Lambda V \mathcal{D}_\Lambda \Phi f(d_\Lambda^* V)(d^* \hat{V}_{\Lambda^c}), \Phi + \hat{\Phi}_{\Lambda^c}) e^{S_{\hat{\Lambda}, \text{inv}}((d_\Lambda^* V)(d^* \hat{V}_{\Lambda^c}), \Phi + \hat{\Phi}_{\Lambda^c})} \end{aligned}$$

wobei wir zunächst (3.27) und dann die Tatsache benutzt haben, daß für geschlossene Λ und $V \in \Omega_\Lambda^2(U(1))$ gilt:

$$(d^* V)(b) = \begin{cases} 1, & b \notin \Lambda_1 \\ (d^* V)(b), & b \in \Lambda_1 \end{cases}$$

Nun führen wir die gleichen Argumente wie zur Herleitung von (3.24) an und erhalten

$$= Z_\Lambda(\hat{V}, \hat{\Phi})^{-1} \int d\omega_{\Lambda, \text{Lan}}(u) \mathcal{D}_\Lambda \Phi f(u d^* \hat{V}_{\Lambda^c}, \Phi + \hat{\Phi}_{\Lambda^c}) e^{S_{\hat{\Lambda}, \text{inv}}(u d^* \hat{V}_{\Lambda^c}, \Phi + \hat{\Phi}_{\Lambda^c})}$$

Als nächstes überzeugen wir uns davon, daß

$$d^* \hat{V}_{\Lambda^c} \in \mathcal{U}_{\Lambda, \text{Lan}}, d^* \hat{V} \quad (3.34)$$

In der Tat gilt klarerweise $(d^* d^* \hat{V}_{\Lambda^c})_{\Lambda} = \mathbb{1}$ und außerdem folgt für geschlossene Λ , also offene Λ^c :

$$(d^* \hat{V}_{\Lambda^c})(b) = (d^* \hat{V})_{\Lambda^c}(b), \quad \forall b \in \Lambda_1^c$$

Wir erhalten also unmittelbar

$$(3.33) = E_{\Lambda, \text{Lan}}(f \mid d^* \hat{V}, \hat{\Phi})$$

und damit die Behauptung (3.28).

Umgekehrt müssen wir nun zeigen, daß auch jeder Gibbszustand $\langle . \rangle_{\text{Lan}}$ sich als Bild unter d_2^* eines geeigneten Gibbszustands $\langle . \rangle_{\text{plaq}}$ darstellen läßt. Ich werde den Zustand $\langle . \rangle_{\text{plaq}}$ so konstruieren, daß er invariant unter $\text{Ker } d_2^*$ ist. Sei hierzu f jetzt eine Zylinderfunktion auf $\Omega^2(U(1)) \times \Omega^0(\mathcal{C})$ und Λ der kleinste offene rechteckige Kasten, so daß f nur von den Feldern in Λ abhängt. Wir definieren zunächst eine gemittelte Funktion $\bar{f}$ gemäß

$$\bar{f}(V, \Phi) := \int D_{\Lambda} W f(V d_{\Lambda}^* W, \Phi) \quad (3.35)$$

Hierbei ist $D_{\Lambda} W$ das normierte Haarmaß auf $\Omega_{\Lambda}^3(U(1))$. Aufgrund der trivialen Homologie von Λ ist f nun invariant unter Multiplikationen $V \mapsto V V'$ falls $d_{\Lambda}^* V' = \mathbb{1}$. Es gibt daher eine eindeutig bestimmte Funktion πf auf $d_{\Lambda}^*(\Omega_{\Lambda}^2(U(1)) \times \Omega_{\Lambda}^0(\mathcal{C})) = (\text{Ker } d_{\Lambda}^* \cap \Omega_{\Lambda}^1(U(1))) \times \Omega_{\Lambda}^0(\mathcal{C})$, so daß

$$(\pi f)(d_{\Lambda}^* V, \Phi) = \bar{f}(V, \Phi)$$

Da Λ offen ist, gilt jedoch $d_{\Lambda}^* V = (d^* V)_{\Lambda}$, und da weiter πf von den Feldern außerhalb von Λ ebenfalls nicht abhängt (per Definitionem), dürfen wir stattdessen auch $d^* V$ schreiben und erhalten daher

$$\pi f \circ d_2^* = \bar{f} \quad (3.36)$$

Sei nun ein beliebiger Gibbszustand in Landau-Eichung gegeben. Dann definiere ich

$$\langle f \rangle_{\text{plaq}} := \langle \pi f \rangle_{\text{Lan}} \quad (3.37)$$

Man beachte, daß die rechte Seite wohldefiniert ist, da der Erwartungswert einer Funktion im Zustand $\langle . \rangle_{\text{Lan}}$ durch Vorgabe ihrer Werte auf den Feldern

(U, Φ) mit $d^*U = 1$ bereits eindeutig bestimmt ist (jeder Gibbszustand in Landau-Eichung ist klarerweise auf diesen Feldern konzentriert). Weiter läßt sich jede Zylinderfunktion g auf $\mathcal{L}(U(1)) \times \Omega^0(\mathbb{C})$ nach Einschränkung auf $\mathcal{U}_{\text{Lan}} = \{d^*U = 1\}$ als ein πf_g mit einem geeigneten f_g schreiben (wegen der trivialen Homologie), so daß aus (3.37) folgt

$$\begin{aligned} \langle g \circ d_2^* \rangle_{\text{plaq}} &= \langle \pi f_g \circ d_2^* \rangle_{\text{plaq}} \\ &= \langle \bar{f}_g \rangle_{\text{plaq}} \quad (\text{nach (3.36)}) \\ &= \langle \pi \bar{f}_g \rangle_{\text{Lan}} \\ &= \langle g \rangle_{\text{Lan}} \end{aligned}$$

da klarerweise $\pi \bar{f}_g = \pi f_g = g$ gilt. Falls also die linke Seite von (3.37) ein wohldefinierter Gibbszustand auf $\mathcal{L}(U(1)) \times \Omega^0(\mathbb{C})$ zur Wirkung $S_{\text{inv}} \circ d_2^*$ ist, so ergibt dessen Bild unter d_2^* tatsächlich wieder den ursprünglichen Zustand $\langle \cdot \rangle_{\text{Lan}}$.

Ich zeige nun, daß mit der Definition (3.37) das Funktional $\langle \cdot \rangle_{\text{plaq}}$ linear ist und die DLR-Gleichungen zur Wirkung $S_{\text{inv}} \circ d_2^*$ erfüllt, wobei ich mich o.E. auf bedingte Erwartungswerte in geschlossenen rechteckigen Kästen $K \subset \Lambda^\infty$ beschränken darf, die groß genug sind, so daß f nur von den Feldern im offenen Kern $\overset{\circ}{K}$ abhängt. Nach den DLR-Gleichungen für $\langle \cdot \rangle_{\text{Lan}}$ gilt:

$$\langle f \rangle_{\text{plaq}} = \langle E_{K, \text{Lan}} (\pi f | \cdot) \rangle_{\text{Lan}}$$

und wir müssen zeigen, daß für alle (U, Φ) mit $d^*\hat{U} = 1$ gilt:

$$E_{K, \text{Lan}} (\pi f | \hat{U}, \hat{\Phi}) = (\pi E_{K, \text{plaq}} (f | \cdot))(\hat{U}, \hat{\Phi}) \quad (3.38)$$

Aus dem Beweis für diese Identität wird auch hervorgehen, daß in der Definition von πf die Wahl von Λ als dem kleinsten offenen rechteckigen Kasten, der den Abhängigkeitsbereich von f enthält, irrelevant ist. Die Definition von $\langle f \rangle_{\text{plaq}}$ verändert sich nicht, wenn wir stattdessen einen beliebigen größeren offenen rechteckigen Kasten Λ' verwenden. Falls $\overset{\circ}{K} \supset \Lambda'$, so gilt dann auf $\mathcal{U}_{\text{Lan}}$ immer noch

$$E_{K, \text{Lan}} (\pi f | \cdot) = \pi E_{K, \text{plaq}} (f | \cdot)$$

und der zweite Ausdruck hängt klarerweise nur noch von f und K und nicht mehr von Λ bzw. Λ' ab. $\langle f \rangle_{\text{plaq}} \equiv \langle \pi f \rangle_{\text{Lan}}$ ist also tatsächlich ein lineares Funktional, das nur von f abhängt und nicht vom endlichen Volumen Λ , in dem $\bar{f}$ und πf definiert werden.

Zum Nachweis von (3.38) sei nun $\hat{K} \supset K$ der kleinste offene rechteckige Kasten, so daß $E_{K, \text{Lan}}(\pi f | \hat{U}, \hat{\Phi})$ nur von den Feldern in $\hat{K}$ abhängt. Für $(d^* \hat{U})_{\hat{K}} = \mathbb{1}$ folgt $d_{\hat{K}}^* \hat{U}_{\hat{K}} = (d^* \hat{U})_{\hat{K}} = \mathbb{1}$, und wir wählen eine spezielle Lösung^(*) $\hat{V}(\hat{U}) \in \Omega_K^2(U(1))$ mit

$$d_{\hat{K}}^* \hat{V}(\hat{U}) = \hat{U}_{\hat{K}}$$

Auf dem Bonds $b \in \hat{K}$ gilt dann auch

$$(d^* \hat{V}(\hat{U}))(b) = \hat{U}(b), \quad b \in \hat{K}$$

und da Erwartungswerte in K von den Feldern $\hat{U}(b)$ für $b \in \hat{K}^c$ nicht mehr abhängen, können wir für $(d^* \hat{U})_{\hat{K}} = \mathbb{1}$ folgern

$$\begin{aligned} E_{K, \text{Lan}}(\pi f | \hat{U}, \hat{\Phi}) &= E_{K, \text{Lan}}(\pi f | d_2^*(\hat{V}(\hat{U}), \hat{\Phi})) \\ &= E_{K, \text{plaq}}(\pi f \circ d_2^* | \hat{V}(\hat{U}), \hat{\Phi}) \\ &= E_{K, \text{plaq}}(\bar{f} | \hat{V}(\hat{U}), \hat{\Phi}) \end{aligned}$$

wobei wir (3.28) und (3.36) verwendet haben. Nach Konstruktion ist jedoch der letzte Ausdruck invariant unter

$$\hat{V}(\hat{U}) \mapsto \hat{V}(\hat{U}) d_K^* w \quad (U(1))$$

da für $b \in \hat{K}$ auch $(d^*(\hat{V}(\hat{U}) d_K^* w))(b) = \hat{U}(b)$ gilt.

Wir dürfen also stattdessen auch den entsprechend gemittelten Erwartungswert verwenden und erhalten:

(*) $\hat{V}(\hat{U})$ kann nach dem Theorem über implizite Funktionen in jedem Fall sogar stückweise differenzierbar gewählt werden, da $d_K^* : \Omega_K^2(U(1)) \longrightarrow \Omega_K^1(U(1)) \cap \text{Ker } d_K^*$ eine surjektive Submersion ist.

$$\begin{aligned}
 &= \int \mathcal{D}_K^* W \ E_{K, \text{plaq}} (\bar{f} | \hat{V}(\hat{u}) d_K^* W, \hat{\Phi}) \\
 &=: \overline{(E_{K, \text{plaq}})} (\bar{f} | \hat{V}(\hat{u}), \hat{\Phi}) \quad (3.39)
 \end{aligned}$$

Als nächstes überlegen wir uns, daß wir nun $\bar{f}$ wieder durch f ersetzen dürfen:

Lemma 3.12: Sei K rechteckig und abgeschlossen und f nur von den Feldern im offenen Kasten $\Lambda \subset K$ abhängig. Dann gilt unabhängig von $(\hat{V}, \hat{\Phi})$:

$$E_{K, \text{plaq}} (\bar{f} | \hat{V}, \hat{\Phi}) = E_{K, \text{plaq}} (f | \hat{V}, \hat{\Phi})$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
 &E_{K, \text{plaq}} (\bar{f} | \hat{V}, \hat{\Phi}) \\
 &= Z_{K, \text{plaq}}^{-1} \int \mathcal{D}_K V \mathcal{D}_K \Phi \int \mathcal{D}_\Lambda W \ f(V d_\Lambda^* W, \Phi) e^{S_{\hat{K}, \text{inv}}(d^*(V \hat{V}_{K^c}), \Phi + \hat{\Phi}_{K^c})} \\
 &= Z_{K, \text{plaq}}^{-1} \int \mathcal{D}_K V \mathcal{D}_K \Phi \mathcal{D}_\Lambda W \ f(V, \Phi) e^{S_{\hat{K}, \text{inv}}(d^*(V \hat{V}_{K^c}), \Phi + \hat{\Phi}_{K^c})}
 \end{aligned}$$

durch eine Variablentransformation $V \rightarrow V d_\Lambda^* W$ und die Tatsache, daß für Plaketten $p \in \Lambda_2$ gilt: $(d^* W)(p) = (d_\Lambda^* W)(p)$ $\square$

Lemma 3.12 überträgt sich natürlich auch auf die gemittelten Erwartungswerte (3.39), und wir erhalten insgesamt die gewünschten DLR-Gleichungen:

$$\begin{aligned}
 \langle f \rangle_{\text{plaq}} &= \langle \bar{E}_{K, \text{plaq}} (f | \hat{V}(\hat{u}), \hat{\Phi}) \rangle_{\text{Lan}} \\
 &= \langle (\pi E_{K, \text{plaq}} (f | \cdot))(\hat{u}, \hat{\Phi}) \rangle_{\text{Lan}} \\
 &= \langle E_{K, \text{plaq}} (f | \hat{V}, \hat{\Phi}) \rangle_{\text{plaq}}
 \end{aligned}$$

wobei wir die triviale Identität $\bar{g}(\hat{V}(\hat{u}), \hat{\Phi}) = \pi g(\hat{u}, \hat{\Phi})$ für allgemeine funktionen g benutzt haben.

Hiermit ist gezeigt, daß sich jeder Gibbszustand $\langle . \rangle_{\text{Lan}}$ als Bild unter d_2^* eines geeigneten Gibbszustands $\langle . \rangle_{\text{plaq}}$ darstellen läßt. Zu zeigen bleibt, daß hierdurch $\langle . \rangle_{\text{plaq}}$ bereits eindeutig bestimmt ist. Dies folgt jedoch sofort aus der zu Elitzurs Theorem [Elitzur 1975; De Angelis, De Falco, Guerra 1978] analogen Tatsache, daß wegen Lemma 3.12 jeder Gibbszustand $\langle . \rangle_{\text{plaq}}$ invariant ist unter der Symmetrie $V \mapsto V d^* W$ ("keine spontane Brechung lokaler Symmetrien"). Mit (3.36) gilt daher

$$\begin{aligned} \langle f \rangle_{\text{plaq}} &\equiv \langle \bar{f} \rangle_{\text{plaq}} \\ &= \langle f \circ d_2^* \rangle_{\text{plaq}} \\ &= \langle \pi f \rangle_{\text{Lan}} \end{aligned}$$

d.h. die Zuordnungen (3.25) und (3.37) sind tatsächlich invers zueinander. ▣

Hiermit sind wir nun in der Lage, uns der Frage der spontanen Symmetriebrechung in Landau-Eichung zuzuwenden. Ich werde als erstes zeigen, daß der Betrag jeder n -Punkt-Funktion in den Higgsfeldern nach oben beschränkt ist durch die gleiche n -Punkt-Funktion des reinen ϕ^4 -Modells (d.h. ohne Eichfelder) mit geeigneten Randbedingungen. Dies bedeutet insbesondere, daß die globale Symmetrie im Higgsmodell immer dann ungebrochen ist, wenn sie mit dem gleichen Higgspotential $V(\phi)$ im reinen ϕ^4 -Modell ungebrochen ist. Ich will vorweg die Konsequenzen diskutieren, die sich hieraus im Spezialfall des Modells mit eingefrorener Länge ergeben.

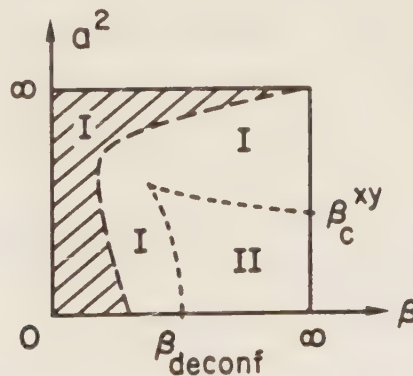


Fig. 8: Das vermutete 2-Phasendiagramm in kompakten 4-dimensionalen $U(1)$ -Modellen mit eingefrorener Länge $|\phi| = a$ des Higgsfeldes. Die Existenz einer zusammenhängenden massiven Confinement-Higgs-Phase ist in dem gestreiften

Bereich der Region I bekannt⁽¹⁾. Die Existenz einer masselosen Coulomb-phase II ist für $a^2 \neq 0$ umstritten⁽²⁾. Die gepunktete Phasengrenze wird durch numerische ("Monte-Carlo") Daten belegt⁽³⁾. Für $a^2 < \beta_c^{xy}$ tritt keine spontane Symmetriebrechung in Landau-Eichung auf (Theorem 3.13).

Das mutmaßliche Phasendiagramm ist in Fig. 8 zu sehen. Herausragendes Merkmal ist die Tatsache [Osterwalder, Seiler 1978; Fradkin, Shenker 1979], daß in einem Parameterbereich mit der etwaigen Form des gestreiften Teils der Region I Erwartungswerte eichinvarianter Observabler analytisch von β und a^2 abhängen. Insbesondere ist also in diesem Modell die Higgsphase (β groß und a^2 groß) nicht durch einen Phasenübergang von der Confinement-Phase (β klein und a^2 klein) getrennt. Da wir jedoch durch das angekündigte Theorem 3.13 wissen, daß für $a^2 < \beta_c^{xy}$ die globale Symmetrie nicht spontan gebrochen ist, gibt es nur zwei Möglichkeiten: Entweder es gilt $\langle \Phi \rangle_{\text{Landau}} = 0$ für alle $\beta < \infty$ und alle $a^2 < \infty$, oder aber der Ordnungsparameter $\langle \Phi \rangle_{\text{Landau}}$ definiert eine Pseudo-Phasentrennlinie, die quer durch die Confinement-Higgs-Phase verläuft (die Phasentrennlinie müßte jedenfalls aufgrund von Korrelationsungleichungen (Theorem 3.13 ii) von links nach rechts in Fig. 8 monoton fallen) und somit nichts mit den physikalisch relevanten, eichinvarianten Eigenschaften des Modells zu tun hätte. Egal welche der beiden Möglichkeiten man für wahrscheinlicher hält, mir erscheinen doch beide sehr bemerkenswert.

Theorem 3.13: Es sei $dP_\Lambda(\hat{V}, \hat{\Phi})$ eine Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen, so daß für ein fest vorgegebenes Higgspotential $V(\phi)$ und für alle $0 \leq \beta < \infty$ die thermodynamischen Limiten

$$\langle \phi^{q_1} \bar{\phi}^{q_2} \rangle_{P_{\beta, q}} := \lim_{\Lambda \uparrow \Lambda^\infty} \int dP_\Lambda(\hat{V}, \hat{\Phi}) E_{\Lambda, P_{\beta, q}}(\phi^{q_1} \bar{\phi}^{q_2} | \hat{V}, \hat{\Phi})$$

sowie

$$\langle \phi^{q_1} \bar{\phi}^{q_2} \rangle_{P_{\beta, q, +}} := \lim_{\Lambda \uparrow \Lambda^\infty} \int dP_\Lambda(\hat{V}, \hat{\Phi}) E_{\Lambda, P_{\beta, q}}(\phi^{q_1} \bar{\phi}^{q_2} | \mathbf{1}, \hat{\mathbb{R}})$$

existieren ($q_i \in C^0(N_0)$), d.h. mit endlichem Träger, und $\phi = R e^{i\varphi}$.

(1) [Osterwalder, Seiler 1978]

(2) [Seiler 1985; Fröhlich (private Mitteilung)].

(3) Für eine sehr schöne und vollständige Übersicht über alle neueren Monte-Carlo-Ergebnisse siehe [Jersák, 1985].

Dann gilt:

- i) $|\langle \phi^{q_1} \bar{\phi}^{q_2} \rangle_{\text{plaq}}| \leq \langle \phi^{q_1} \bar{\phi}^{q_2} \rangle_{\text{plaq},+}$
- ii) $\langle \phi^{q_1} \bar{\phi}^{q_2} \rangle_{\text{plaq},+}$ ist eine monoton wachsende Funktion von β und im Fall eingefrorener Länge $|\phi| = a$ auch monoton wachsend in a^2 .
- iii) $\langle \phi^{q_1} \bar{\phi}^{q_2} \rangle_{\text{plaq},+, \beta=\infty}$ ist eine n-Punktfunktion im Spinmodell mit Wirkung $S_H(A=0, \phi) \equiv \frac{1}{2} \|\mathrm{d}\phi\|^2 + \sum_x V(\phi(x))$.

Bemerkung: Nach Korrelationsungleichungen von [Messager et al. 1978] existiert im Modell mit eingefrorener Länge $|\phi| \equiv R = a$ der thermodynamische Limes $\langle \cdot \rangle_{\text{plaq},+}$ immer translationsinvariant und klarerweise unabhängig von der Familie $(\mathrm{d}P_\Lambda)_{\Lambda \in \Lambda^\infty}$. Für $\beta = \infty$ erhalten wir dann das XY-Modell. Falls dieses in seiner massiven Phase ist, so folgt $\langle \phi_x \rangle_{\text{plaq}} = 0$.

Beweis:

- i) Es genügt zu zeigen, daß

$$|E_{\Lambda, \text{plaq}}(\phi^{q_1} \bar{\phi}^{q_2} | \hat{V}, \hat{\phi})| \leq E_{\Lambda, \text{plaq}}(\phi^{q_1} \bar{\phi}^{q_2} | \mathbb{1}, \hat{R}) \quad (3.40)$$

Basierend auf den allgemeinen Methoden von [Ginibre 1970] folgt dies im wesentlichen aus Korrelationsungleichungen von [Messager, Miracle-Sole, Pfister 1978] und [Brydges, Fröhlich, Seiler 1979a] (s. auch Beweis von Theorem 2.28 ii). Ich werde die Beweisidee nur grob skizzieren. Zunächst beachte man, daß die rechte Seite von (3.40) reell und positiv ist (aus analogen Gründen wie entsprechende Erwartungswerte in (2.14), s. Lemma 2.8). Es genügt daher, (3.40) für die Betragsquadrate zu zeigen, für die wir eine Darstellung mit Hilfe verdoppelter Variabler verwenden. Als erstes schreiben wir wie gehabt

$$\phi^{q_1} \bar{\phi}^{q_2} = R^p e^{i(\varphi, q)}$$

mit $p = q_1 + q_2$ und $q = q_1 - q_2$. Alsdann

$$\begin{aligned} |E_{\Lambda, \text{plaq}}(\phi^{q_1} \bar{\phi}^{q_2} | \hat{V}, \hat{\phi})|^2 &= E_{\Lambda, \text{plaq}}(\phi^{q_1} \bar{\phi}^{q_2} | \hat{V}, \hat{\phi}) E_{\Lambda, \text{plaq}}(\phi^{q_1} \bar{\phi}^{q_2} | \hat{V}, \hat{\phi}) \\ &= E_{\Lambda, \text{plaq}}(R_1^p e^{i(\varphi_1, q)} | \hat{V}, \hat{\phi}) E_{\Lambda, \text{plaq}}(R_2^p e^{-i(\varphi_2, q)} | \hat{V}, \hat{\phi}) \\ &= Z_{\Lambda, \text{plaq}}^{-2} \int \mathrm{d}\varphi_1 \mathrm{d}\varphi_2 \mathrm{d}\phi_1 \mathrm{d}\phi_2 R_1^p R_2^p e^{i(\varphi_1 - \varphi_2, q)} \\ &\quad e^{S_{\hat{\Lambda}, \text{inv}}(\mathrm{d}^*(V_1 \hat{V}_{\Lambda^c}), \phi_1 + \hat{\phi}_{\Lambda^c})} e^{S_{\hat{\Lambda}, \text{inv}}(\mathrm{d}^*(V_2 \hat{V}_{\Lambda^c}), \phi_2 + \hat{\phi}_{\Lambda^c})} \end{aligned} \quad (3.41)$$

Es genügt, den Realteil dieses Erwartungswertes zu betrachten, da der Imaginärteil klarerweise Null sein muß. Durch Einführen zweikomponentiger Größen $\underline{R} = (R_1, R_2)$, $\underline{Y} = (Y_1, Y_2)$, $\underline{V} = (V_1, V_2)$ läßt sich (3.41) schreiben als Erwartungswert von

$$\underline{R}^p \cos(\underline{Y}, \underline{q})$$

wobei $\underline{p} = (p, p)$ und $\underline{q} = (q, -q)$. Wir bilden nun den gleichen Erwartungswert in gestrichenen Variablen mit Randbedingung " + " und erhalten schließlich für die Differenz

$$\begin{aligned} & |E_{\lambda, p, q}(\phi^{q_1} \bar{\phi}^{q_2} | \underline{1}, \hat{R})|^2 - |E_{\lambda, p, q}(\phi^{q_1} \bar{\phi}^{q_2} | \hat{V}, \hat{\phi})|^2 \\ &= Z_{\lambda}(\hat{\phi}, \hat{V})^{-2} Z_{\lambda}(\hat{R}, 1)^{-2} \int D_{\lambda}^2 \underline{V} D_{\lambda}^2 \underline{\phi} D_{\lambda}^2 \underline{V}' D_{\lambda}^2 \underline{\phi}' [(R')^p \cos(\underline{Y}', \underline{q}) - R^p \cos(\underline{Y}, \underline{q})] \\ &\quad e^{S_{\hat{\lambda}, \text{inv}}(d^*(V_1, \hat{V}_{\lambda^c}), \phi_1 + \hat{\phi}_{\lambda^c})} e^{S_{\hat{\lambda}, \text{inv}}(d^*(V_2, \hat{V}_{\lambda^c}), \phi_2 + \hat{\phi}_{\lambda^c})} \\ &\quad e^{S_{\hat{\lambda}, \text{inv}}(d^*(V_1'), \phi_1' + \hat{R}_{\lambda^c})} e^{S_{\hat{\lambda}, \text{inv}}(d^*(V_2'), \phi_2' + \hat{R}_{\lambda^c})} \end{aligned} \quad (3.42)$$

Wir schreiben nun $V = e^{iF}$ und führen nach der Umskalierung $F \mapsto 2F$, $Y \mapsto 2Y$ die Variablentransformationen aus dem Beweis von Theorem 2.28 durch

$$\underline{Y}^{\pm} = \underline{Y} \pm \underline{Y}', \quad \underline{F}^{\pm} = \underline{F} \pm \underline{F}', \quad \underline{R}^{\pm} = \frac{1}{2} (\underline{R}' \pm \underline{R})$$

Dies ergibt

$$\begin{aligned} & (\underline{R}')^p \cos(2\underline{Y}', \underline{q}) - R^p \cos 2(\underline{Y}, \underline{q}) = \\ &= \mathcal{P}_0(\underline{R}^+, \underline{R}^-) \cos(\underline{Y}^+, \underline{q}) \cos(\underline{Y}^-, \underline{q}) \\ &+ \mathcal{P}_e(\underline{R}^+, \underline{R}^-) \sin(\underline{Y}^+, \underline{q}) \sin(\underline{Y}^-, \underline{q}) \end{aligned}$$

wobei $\mathcal{P}_0$ und $\mathcal{P}_e$ Polynome in $\underline{R}^+$ und $\underline{R}^-$ mit positiven Koeffizienten sind ($\mathcal{P}_0$ ist ungerade in $\underline{R}^-$ und $\mathcal{P}_e$ gerade). Im Exponenten von (3.42) erhalten wir Summen über Ausdrücke der Form

$$s_i \cos(2Y_i + \theta) + s_i' \cos 2Y_i, \quad i = 1, 2$$

wobei entweder $\xi_i = 1$, $\gamma_i = (dd^* F_i)(p)$ und $\theta = (dd^* \hat{F}_{\Lambda^c})(p)$, oder $\xi_i = R_i(x) R_i(y)$, $\gamma_i = (d^* F_i + d f_i)_{xy}$ und $\theta = (d^* \hat{F}_{\Lambda^c} + d \hat{f}_{\Lambda^c})_{xy}$. Mit Hilfe von $\gamma_i^\pm = \gamma_i \pm \gamma_i$, $\xi_i^\pm = \frac{1}{2} (\xi_i \pm \xi_i)$ wird daraus

$$2 \xi_i^+ \cos(\gamma_i^+ + \frac{\theta}{2}) \cos(\gamma_i^- + \frac{\theta}{2}) + 2 \xi_i^- \sin(\gamma_i^+ + \frac{\theta}{2}) \sin(\gamma_i^- + \frac{\theta}{2})$$

wobei $\xi_i^\pm$ wieder Polynome in R_i mit positiven Koeffizienten sind. Durch Entwickeln der Exponentialfunktion erhalten wir eine Reihe von symmetrischen Ausdrücken in den Winkelfunktionen von $\underline{F}^+$, $\underline{f}^+$ und $\underline{F}^-$, $\underline{f}^-$, deren Integral faktorisiert und daher positiv ist. Die verbleibenden radialen Integrale sind dann aus den gleichen Gründen wie in Theorem 2.28 ebenfalls positiv, so daß wir insgesamt

$$(3.42) \geq 0$$

erhalten.

- ii) Folgt sofort mit den Methoden für die entsprechenden Korrelationsungleichungen von [Brydges, Fröhlich, Seiler 1979 a].
- iii) Die Behauptung ist nicht, daß im unendlichen Volumen das Modell für $\beta \rightarrow \infty$ stetig in das Spinsystem übergeht, sondern daß wir für jedes endliche Volumen Λ und $\beta = \infty$ das Spinsystem in Λ erhalten und folglich dann auch im thermodynamischen Limes (die Reihenfolge der Limiten ist also zuerst $\beta \rightarrow \infty$ und dann $\Lambda \rightarrow \Lambda^\infty$). Im endlichen Volumen Λ sind im Limes $\beta = \infty$ alle Plakettenvariablen auf 1 eingefroren:

$$(d d^* (\hat{V}_{\Lambda^c}))(p) = 1 \quad \forall p \in \Lambda_2$$

Ich beschränke mich auf abgeschlossene rechteckige Λ und zeige, daß mit der Randbedingung $\hat{V} = \underline{1}$ hieraus bereits $d^* V = \underline{1}$ folgt. Dies bedeutet, daß alle Eichfelder $U = d^* V$ auf die eins eingefroren sind und demzufolge nur noch ein reines Spinmodell übrigbleibt.

Als erstes beachte man, daß für abgeschlossene Λ und $V \in \Omega_{\Lambda}^2(U(1))$ wieder $d^* V = d_{\Lambda}^* V$ gilt. Insbesondere für Bonds b , die nicht mehr in Λ liegen, folgt also

$$(d^* V)(b) = 1, \quad b \in \Lambda_1^c$$

Den ersten nichttrivialen Wert von $(dd^*V)(p)$ erhalten wir also auf den Plaketten, die senkrecht auf dem Rand von Λ stehen und nach außen zeigen. Der einzige Beitrag kommt dann von $(d^*V)(b)$, $b \in (\partial\Lambda)_1$. Wenn wir also $dd^*V = 1$ verlangen, folgt $d^*V(b) = 1$ für alle b aus dem Rand von Λ . Wegen $dd^*V \equiv 1$ gilt dann aber auch $(d^*V)(b) = 1$ auf allen Bonds b , die senkrecht auf dem Rand von Λ stehen und nach innen zeigen. Hiermit können wir die gleiche Argumentation für den nach jeder Seite um eine Einheit verkleinerten Kasten durchführen. Durch Iteration folgt schließlich die Behauptung $d^*V = 1$. $\blacksquare$

Hiermit ist also belegt, daß zumindest in den kompakten Modellen mit eingefrorener Länge $|\phi| = a$ der Erwartungswert von ϕ in Landau-Eichung kein geeigneter Ordnungsparameter zur Beschreibung der eichinvarianten Phasenstruktur dieser Systeme ist.

Als nächstes wende ich mich der Symmetriegruppe Grib zu, die auch in Landau-Eichung und unter Verwendung der Variablen $U = d^*V$ noch vorhanden ist. Ihre Wirkung schreibt sich nun in der Form

$$d^*V \mapsto d^*V dg, \quad \phi \mapsto g^{-1}\phi$$

wobei $g \in \text{Grib}$, d.h. $d^*dg = 1$. Wegen der trivialen Homologie gibt es also ein $V_g \in \Omega^2(U(1))$ mit $d^*V_g = dg$. Es folgt $dd^*V_g = 1$ und nach Ausfaktorisieren der globalen Eichtransformationen ergibt sich eine Darstellung

$$\text{Grib} / \text{Glob} \cong \text{Ker } dd^* / \text{Ker } d^*$$

wobei die Faktoren der rechten Seite jeweils als Untergruppen von $\Omega^2(U(1))$ gemeint sind. Aus dem Beweis von Theorem 3.13 iii) geht hervor, daß mit geeigneten Randbedingungen im endlichen Volumen gilt

$$\text{Ker } dd^* \cap \{ \hat{V}_\chi = 1 \} = \text{Ker } d^* \cap \{ \hat{V}_\chi = 1 \}$$

d.h. mit diesen Randbedingungen ist Grib im endlichen Volumen gebrochen. Es drängt sich nun die Frage auf, ob eine spontane Brechung von Grib im thermodynamischen Limes als Unterscheidungsmerkmal zwischen den verschiedenen Phasen in kompakten $U(1)$ -Modellen dienen kann. Zumindest für die

Modelle mit eingefrorener Länge $|\phi| = a$ ist die Antwort aufgrund des nun folgenden Theorems jedoch ebenfalls negativ.

Theorem 3.14: In den kompakten $U(1)$ -Eichmodellen mit eingefrorener Länge $|\phi| = a$ ist jeder Gibbszustand $\langle \cdot \rangle_{\text{Landau}}$ in Landau-Eichung invariant unter Grib, falls β und a klein genug sind (d.h. in der "Confinement-Region" der Confinement-Higgs-Phase).

Bemerkung: Abermals erhalten wir nun zwei Möglichkeiten: Entweder ist Grib im gesamten Phasendiagramm von Fig. 8 (d.h. genauer für $\beta < \infty$ und $a^2 < \infty$) ungebrochen, oder die spontane Brechung von Grib definiert wieder eine Pseudo-Phasentrennlinie (z.B. charakterisiert durch $\langle \phi_x \phi_y \rangle_{\text{Landau}} \neq 0$, $x \neq y$), die quer durch die Confinement-/Higgsphase verlaufen müßte (wegen Theorem 3.13 ii würde diese Linie ebenfalls von links nach rechts in Fig. 8 monoton fallen).

Beweis:

Ich zeige die Aussage für die entsprechenden Zustände $\langle \cdot \rangle_{\text{plaq}}$ durch eine gewöhnliche Hochtemperatur-Clusterentwicklung ähnlich wie in Theorem 3.8. Wir schreiben (*)

$$\begin{aligned} 1 + S_p(F) &= e^{\beta \cos(dA^*F)_p} \\ 1 + G_b(F, \phi) &= e^{a^2 \cos(d^*F + d\phi)_b} \end{aligned}$$

wobei $V = e^{iF}$, $\phi = a e^{i\varphi}$, und erhalten damit für beliebige Funktionen f der Felder V und ϕ in einem endlichen Gebiet

$$\langle f \rangle_{\text{plaq}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\gamma_1, \dots, \gamma_n} \phi_c(\gamma_1, \dots, \gamma_n) \prod_{i=1}^n z(\gamma_i, f) \quad (3.43)$$

Polymere γ sind zusammenhängende Mengen von Bonds und Plaketten, und die Summe $\sum$ geht über alle n -Tupel von Polymeren $(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$, die genau ein f -Polymer enthalten. Die Aktivitäten sind gegeben durch

$$z(\gamma, f) = \int D\varphi D\psi f^{V(\gamma)} \phi^{\gamma} S^{\gamma}$$

(*) Ich benutze der Einfachheit halber die Wilson-Wirkung (1.25a).

wobei $\nu(\gamma) = 0$ für gewöhnliche und $\nu(\gamma) = 1$ für f-Polymere. DF und $D\gamma$ sind die Produkte über Plakttten bzw. Punkte von den entsprechenden normierten Haarmaßen auf $U(1)$. Falls a^2 und β klein genug sind, konvergiert die Entwicklung (3.43) wie gehabt, der thermodynamische Limes ist unabhängig von Randbedingungen und Grib daher ungebrochen. $\blacksquare$

3.3 Zusammenfassung und Ausblicke für das kompakte Modell

Wir haben gesehen, daß das Konzept eichabhängiger Ordnungsparameter zur Beschreibung des Higgsmechanismus äußerst fragwürdig wird, falls aufgrund von Gribov-Kopien die Eichung nicht vollständig fixiert werden kann. Neben den zu Abschnitt 2.1 analogen Spinwellenmethoden zum Nachweis von $\langle \phi \rangle_\lambda = 0$ für $\alpha > 0$ konnte gezeigt werden, daß für große α auch Grib ungebrochen ist, so daß beispielsweise die 2-Punktfunktion $\langle \bar{\phi}_x \phi_y \rangle$ an nicht koinzidierenden Punkten (d.h. $x \neq y$) identisch verschwindet. In Abschnitt 3.2 wurde dann eine neue Methode zur Analyse von Erwartungswerten in Landau-Eichung vorgeschlagen und ausgearbeitet. Mit Hilfe der Darstellung $U = d^* V$ für die Eichfelder U wurde die Zwangsbedingung $d^* U = 1$ der Landau-Eichung automatisch implementiert. Es wurde gezeigt, daß sich sogar jeder Gibbszustand in Landau-Eichung eindeutig auf diese Weise aus einem entsprechenden Gibbszustand in den Plakettenvariablen V ergibt. Hiermit konnte bewiesen werden, daß die globale Symmetrie genauso wie im nicht-kompakten Modell unabhängig von β ($\hat{=} 1/e^2$) ungebrochen ist, falls sie bei gleichem Higgspotential im reinen Spinmodell ($\beta = \infty$) ungebrochen ist. Für Higgs-Potentiale, die den technischen Bedingungen von [Osterwalder, Seiler 1978] genügen (z.B. λ groß genug und insbesondere $\lambda = \infty$, d.h. eingefrorene Länge $|\phi| = a$), so daß eine analytisch zusammenhängende Confinement-/Higgsphase wie in Fig. 8 vorliegt, hat dies zur Konsequenz, daß $\langle \phi \rangle_{\text{Landau}}$ kein geeigneter Ordnungsparameter ist. Weiter ist in der Confinement-Region dieser Phase sogar Grib ungebrochen. Ein elementarer Beweis wurde für $\lambda = \infty$ skizziert, die Aussage läßt sich jedoch ohne große Schwierigkeiten auch auf eine größere Klasse von Higgspotentialen verallgemeinern.

Zumindest für Higgspotentiale mit großem λ tragen diese eichabhängigen Ordnungsparameter also nicht zu einem besseren Verständnis der eichunabhängigen Phasenstruktur in diesen Modellen bei. Die Situation könnte sich allerdings durchaus verbessern im störungstheoretischen Bereich kleiner λ , da nun die Confinement-Phase von der Higgsphase durch einen Phasenübergang getrennt zu sein scheint (für eine Übersicht über alle relevanten Monte-Carlo Ergebnisse s. [Jersák 1985]).

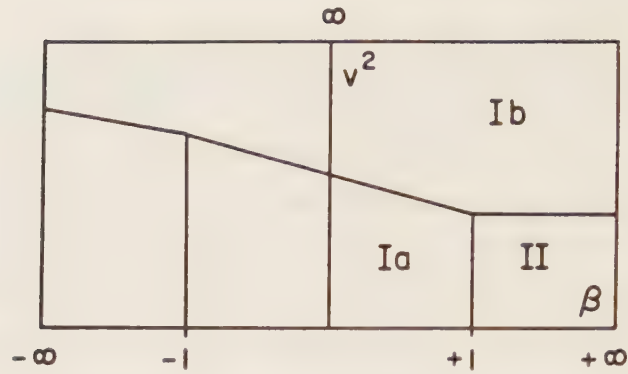


Fig. 9: Phasendiagramm im kompakten Higgsmodell für kleine λ nach Monte-Carlo Ergebnissen von [Jansen et al. 1985/86]. Die Confinement-Phase Ia ist auch für negative β von der Higgsphase Ib getrennt.

Unter Einbeziehung von Theorem 3.13 und 3.14 läßt sich für das in Fig. 9 skizzierte Phasendiagramm für $\beta > 0$ folgende widerspruchsfreie Hypothese formulieren:

1. In der Confinement-Phase Ia ist sowohl Glob als auch Grib ungebrochen, d.h. $\langle \phi_x \rangle_{\text{Lan}} = 0$ und $\langle \phi_x \bar{\phi}_y \rangle = 0$ (für $x \neq y$).
2. In der Coulombphase II ist Glob immer noch ungebrochen, d.h. $\langle \phi_x \rangle_{\text{Lan}} = 0$, aber Grib ist spontan gebrochen und $\langle \phi_x \bar{\phi}_y \rangle_{\text{Lan}} \sim \exp(-m|x-y|)$.
3. In der Higgsphase Ib ist sowohl Glob als auch Grib spontan gebrochen, und es gilt $\langle \phi_x \rangle_{\text{Lan}} \neq 0$, $\langle \phi_x \bar{\phi}_y \rangle_{\text{Lan}} \geq \text{const.}$

Sollte diese Hypothese zutreffen, so wäre die Störungstheorie im Prinzip rehabilitiert, da ihre Gültigkeit sowieso nur für den Bereich kleiner λ und großer β erwartet werden kann. Außerdem würde sich das kompakte Modell in diesem Parameterbereich in der Frage der spontanen Symmetriebrechung dann qualitativ genauso verhalten wie das nichtkompakte.

Weiter sollte man sich nun natürlich die Frage stellen, ob es nicht eine der nichtkompakten Landau-Eichung nachempfundenen vollständige Eichfixierung (d.h. ohne Gribov-Kopien) gibt, in der $\langle \phi_x \rangle$ zu einem geeigneten Ordnungsparameter wird. Man müßte vielleicht versuchen, diese Eichung indirekt zu definieren, indem man jeder Eichfeldkonfiguration $U \in \Omega^1(U(1))$ eine Eichtrans-

formation $h(U)$ zuordnet, die U in die gewünschte Eichung transformiert. Bekanntlich muß $h(U)$ hierzu die Äquivarianzbedingung

$$h(Udg) = g^{-1} h(U) \quad (3.44)$$

erfüllen. Im nichtkompakten Modell erfüllt mit $U = e^{iA}$ und $h = e^{i\chi}$

$$\chi(A) = -\Delta^{-1} d^* A$$

gerade diese Bedingung. Dem Erwartungswert von $\phi(x)$ in der durch $h(U) = 1$ definierten h -Eichung entspricht nun gerade die eichinvariante Observable

$$h(U)_x^{-1} \phi(x) \quad (3.45)$$

Wir brauchen also die h -Eichung gar nicht explizit zu kennen, sondern müssen nur $h(U)^{-1}$ an der Stelle x bestimmen. Allgemein fassen wir nun für $q(x) \in \mathbb{Z}$ $h(U)^q = \prod_x (h(U)(x))^{q(x)}$ als $\mathbb{C}$ -wertige Funktion auf, deren Fourierdarstellung wegen (3.44) von der Form ist ($U = e^{iA}$):

$$h(U)^{-q} = \sum_{\alpha^j j = q} c_q(j) e^{i(\pi, j)} \quad (3.46)$$

mit geeigneten Koeffizienten $c_q(j)$. Umgekehrt erfüllt jede Funktion $f_q(U)$ der Form (3.46) die zu (3.44) analoge Bedingung

$$f_q(Udg) = f_q(u) g^q$$

Falls also die Nullstellen von $f_x(U) \equiv f_{(q = \delta_x)}(U)$ für alle $x \in \Lambda_0$ vom (Gibbs-) Maß Null sind, erhalten wir durch

$$h(U)_x^{-1} := \frac{f_x(U)}{|f_x(U)|}$$

gerade wieder eine legitime h -Eichung.

Mit Hilfe einer derartigen h -Eichung scheint es nun nicht ganz ausgeschlossen, daß sich ein neuartiges Ergebnis von [Szlachányi 1986] für das Z_2 -Higgsmodell auch im $U(1)$ -Higgsmodell mit eingefrorener Länge reproduzieren läßt.

Obwohl auch im Z_2 -Higgsmodell die Confinement-/Higgsphase analytisch zusammenhängt, konnte Szlachányi nämlich zeigen, daß es eine Klasse von Eichungen gibt, in denen der Erwartungswert von $\phi(x)$ in der Higgsregion (a^2 groß) ungleich Null ist, während er in der Confinementregion (a^2 klein, β klein) verschwindet. Dies ist insofern kein Widerspruch, als die Analytizität nur für lokale Observable gezeigt ist, während die verallgemeinerten "Stringobservablen" von der Form (3.45) hochgradig nichtlokal sind.

Ein konkreter Vorschlag für $f_q(U)$, der der nichtkompakten Landau-Eichung wahrscheinlich am nächsten kommt, wäre z.B.

$$f_q(U) = \sum_{d^*j=q} e^{i(\pi, j)} e^{-\frac{g^2}{2}(\delta, \Delta^{-1}j)}$$

mit einer geeigneten Kopplungskonstanten g^2 . Wäre die Summe ein Integral, so würden wir unmittelbar $f_q(U) / |f_q(U)| = \exp i (d^*A, \Delta^{-1}q)$ erhalten, also die Landau-Eichung des nichtkompakten Modells. Durch eine Dualitätstransformation erhalten wir stattdessen

$$f_q(U) = \text{const.} \int D\varphi e^{-i(\varphi, q)} \sum_{n_1} e^{-\frac{1}{2g^2} \|\Delta^{1/2}(\pi + d\varphi + 2\pi n_1)\|^2}$$

Eine strukturell ähnliche Darstellung wurde auch von Szlachányi vorgeschlagen. Durch Anwendung der Transformation von [Balaban et al. 1984] wie in Abschnitt 2.2 erhalten wir schließlich

$$f_q(U) = e^{i(d^*\pi, \Delta^{-1}q)} \sum_{dn_2=0} e^{2\pi i(n_1, n_2), d\Delta^{-1}q} e^{-\frac{1}{2g^2} \|d\pi + 2\pi n_2\|^2} \quad (3.47)$$

Dies ist eine in A periodisierte Version des entsprechenden Ausdrucks im nichtkompakten Modell. Der Erwartungswert von $(*) e^{i(\varphi, q)}$ in h-Eichung ergäbe sich nun als Erwartungswert von

$$f_q(U) / |f_q(U)| \quad (3.48)$$

(*) $\phi = ae^{i\varphi}$

in unitärer Eichung. Für eine analytische Untersuchung bei großem "Hopping-Parameter" a^2 könnte man evtl. den folgenden Weg einschlagen:

Zunächst ist der Erwartungswert von (3.48) aus Symmetriegründen reell. Man sollte meinen, daß man für große a^2 nur einen kleinen Fehler macht, wenn man im Funktionalmaß die Integration auf eine geeignete Umgebung von $U = 1$ einschränkt. Das Problem wird dann letztendlich sein, diesen Fehler auch wirklich gut abzuschätzen. Falls dies jedoch gelingt und die Umgebung so gewählt werden kann, daß auf ihr $\text{Re}(f_q(U)) > 0$ gilt, so können wir eine verallgemeinerte Jensen-Ungleichung verwenden und erhalten

$$\begin{aligned}
 & \int d\mu^+(u) \quad \text{Re}(P_q(u)) / |P_q(u)| \\
 & \geq \frac{\int d\mu^+(u) \quad \text{Re}(P_q(u))}{\int d\mu^+(u) \quad |P_q(u)|} \\
 & \geq \frac{\int d\mu^+ \sum_{n_2=0} e^{i(\pi + 2\pi n_1(n_2), d\Delta' q)} e^{-\frac{1}{2g^2} \|d\pi + 2\pi n_2\|^2}}{\int d\mu^+ \sum_{n_2=0} e^{-\frac{1}{2g^2} \|d\pi + 2\pi n_2\|^2}} \quad (3.49)
 \end{aligned}$$

wobei $d\mu^+$ das wie oben beschrieben abgeänderte normierte Funktionalmaß des kompakten Modells in unitärer Eichung ist. Der Ausdruck (3.49) kann nun jedoch für eine geeignete Wahl des Eichparameters g^2 völlig analog wie in [Kennedy, King 1986] entwickelt werden und bleibt für $q = \delta_x$ oder $q = \delta_x - \delta_y$ positiv und gleichmäßig in Λ nach unten beschränkt. Ob der Fehler, den man durch die Wahl von $d\mu^+$ macht, im Verhältnis hierzu tatsächlich klein gehalten werden kann, will ich versuchen, in einer zukünftigen Arbeit zu klären.

Abschließend möchte ich erwähnen, daß die Anmerkungen aus § 2.6 zum Problem der geladenen Zustände in analoger Weise auch für das kompakte Modell gelten. Teilergebnisse in dieser Richtung wurden von [Kondo 1985] und [Barata, Wrezinski 1986] erzielt. Die zentrale Frage jedoch, ob das kompakte $U(1)$ -Higgsmodell überhaupt eine masselose Coulombphase aufweist, ist nach wie vor ungeklärt.

Kapitel 4

DER COLEMAN-WEINBERG MECHANISMUS

Dieses Kapitel ist einer störungstheoretischen Untersuchung zur Frage der Ordnung des Coulomb-Higgs Phasenübergangs im Bereich kleiner e^2 und λ gewidmet. Ich werde nur das nicht-kompakte Modell behandeln, aber sämtliche eichinvarianten Aussagen dürften auch auf das kompakte Modell zutreffen. Wesentliches Ziel der Untersuchung ist es, die üblichen eichabhängigen, weil auf das effektive Potential gestützten Argumente durch eichinvariante Kriterien zu ersetzen. Insbesondere will ich versuchen, Klarheit in die bisher reichlich inkonsistenten Aussagen zum Coleman-Weinberg Mechanismus zu bringen, aufgrund dessen üblicherweise mit einem Phasenübergang 1. Ordnung gerechnet wird. Mit Hilfe verallgemeinerter Clausius-Clapeyron und Ehrenfest-Gleichungen werde ich zeigen, daß sich hierfür im asymptotischen Bereich $e^2 \rightarrow 0$, $\lambda \rightarrow 0$ und $\lambda \sim e^2$ keine Anzeichen bis zu einer "2-loop" Rechnung ergeben. Falls jedoch λ proportional zu e^4 gewählt wird, zeigt eine neue Störungsentwicklung tatsächlich einen Phasenübergang 1. Ordnung auf, und es lassen sich nach geringfügigen Uminterpretationen auch die üblichen Kontinuumsergebnisse der Standardliteratur reproduzieren. Dies führt (meines Wissens zum erstenmal) zu einer quantitativen - wenngleich auch störungstheoretischen - Voraussage einer trikritischen Linie $\lambda_{tc}(e^2) \sim e^4 \log e^2$, auf der der Phasenübergang 2. Ordnung in einen solchen 1. Ordnung übergeht. In einem Schlußparagrafen diskutiere ich mögliche Konsequenzen für einen eventuellen Kontinuumslikes.

4.1. Kritische Bemerkungen zum effektiven Potential und zur Loop-Entwicklung

Eine zentrale Rolle insbesondere im störungstheoretischen Zugang zur Quantenfeldtheorie spielt das sog. erzeugende Funktional der zusammenhängenden Green-Funktionen $G(J)$. In der Gitterfeldtheorie ist es oft zweckmäßig, sich der Sprache der Thermodynamik und statistischen Physik zu bedienen und $G(J)$ (bis auf Vorzeichenkonventionen*) als Gibbs'sche freie Energiedichte in Anwesenheit eines äußeren "Magnetfelds" (x) zu definieren

$$G(J) = \lim_{\Lambda \uparrow \Lambda_0} \frac{1}{|\Lambda|} \log \int D_\Lambda \Phi e^{S_\Lambda(H, \Phi) + \sum_{x \in \Lambda_0} J(x) \Phi(x)} \quad (4.1)$$

wobei $|\Lambda|$ die Anzahl der Gitterpunkte in Λ_0 ist. In einer formalen Entwicklung

$$G = \lim_{\Lambda} \sum_n \frac{1}{n!} \frac{1}{\Lambda} \sum_{x_1, \dots, x_n} G_\Lambda^{(n)}(x_1, \dots, x_n) J(x_1) \dots J(x_n) \quad (4.2)$$

sind die $G_\Lambda^{(n)}$ gerade durch die trunkierten n -Punkt-Funktionen bei $J = 0$ gegeben.

$$G^{(n)} = \lim_{\Lambda} G_\Lambda^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \langle \Phi(x_1); \dots; \Phi(x_n) \rangle_{J=0} \quad (4.3)$$

Im Zusammenhang mit spontaner Symmetriebrechung birgt diese Sprechweise jedoch schon Gefahren in sich. Wenn wir uns nämlich auf konstante J beschränken, was von jetzt ab immer der Fall sein wird, so erhalten wir unter der Annahme von Translationsinvarianz

$$\partial G / \partial J = \langle \Phi(x) \rangle_J \quad (4.4)$$

Nach Definition der spontanen Magnetisierung ist der Limes $J \rightarrow 0$ dieses Erwartungswertes jedoch gar nicht wohl definiert, sondern hängt davon ab, von welcher Richtung aus wir J gegen Null gehen lassen. Falls wir also etwas ungenau spontane Symmetriebrechung mit spontaner Magnetisierung gleichsetzen, so ist dies weiter äquivalent zu einer Unstetigkeit von $\partial G / \partial J$ an der Stelle $J = 0$.

*) Genaugenommen schreibt sich in einem ferromagnetischen Spinsystem die Gibbs'sche freie Energiedichte mit obiger Definition (3.1) als $-G(-J)$. Die "Temperatur" ist hier $T = k = 1$.

Als nächstes betrachtet man das effektive Potential, das gemeinhin als Legendre-Transformierte von $G(J)$ definiert wird und demzufolge auch als Helmholtz'sche freie Energie bezeichnet werden könnte

$$V_{\text{eff}}(\phi) := \phi \cdot J(\phi) - G(J(\phi)) \quad (4.5)$$

Hierbei ist $J(\phi)$ implizit definiert durch die Gleichung

$$\frac{\partial G}{\partial J}(J(\phi)) = \phi \quad (4.6)$$

d.h. als Umkehrfunktion von $\phi(J) := \langle \phi(x) \rangle_J$. Wiewohl dies in der Feldtheorie selten diskutiert wird, sollte man sich natürlich als erstes fragen, ob und wann (4.6) eindeutig nach J aufgelöst werden kann. Falls dies der Fall ist, so folgt jedenfalls

$$\partial V_{\text{eff}} / \partial \phi = J(\phi)$$

d.h. die kritischen Punkte $\partial V_{\text{eff}} / \partial \phi = 0$ liegen nach (4.6) genau an den Stellen $\phi_c = \langle \phi(x) \rangle_J = 0$. Dies führt zu der Sprechweise, daß spontane Symmetriebrechung durch ein Minimum von V_{eff} bei $\phi \neq 0$ angezeigt wird.

Um dies besser zu untermauern, sei zunächst die Frage der Eindeutigkeit der Definitionen (4.5/6) untersucht. Hierzu beachte man, daß $G(J)$ eine manifest konvexe Funktion ist, d.h.

$$G(\theta J_1 + (1-\theta)J_2) \leq \theta G(J_1) + (1-\theta)G(J_2)$$

für alle $\theta \in [0,1]$. Im endlichen Volumen folgt dies aus der Tatsache, daß die Hessematrix

$$\frac{\partial^2 G_\Lambda}{\partial J_a \partial J_b}(J) = \frac{1}{\Lambda} \sum_{x,y} \langle \phi_a(x); \phi_b(y) \rangle_{\Lambda,J}$$

eine statistische Varianz, also positiv semidefinit ist. Als thermodynamischer Limes konvexer Funktionen ist dann $G(J)$ selbst auch konvex. Falls also zwei Lösungen $J_{1/2}$ mit

$$\frac{\partial G}{\partial J}(J_1) = \frac{\partial G}{\partial J}(J_2) = \phi$$

existieren, so folgt auch unmittelbar

$$\frac{\partial G}{\partial J}(\theta J_1 + (1-\theta)J_2) = \phi$$

für alle $\theta \in [0, 1]$, d.h. G ist auf der Verbindungslinie zwischen J_1 und J_2 eine lineare Funktion von θ . Für die Definition von $V_{\text{eff}}(\phi)$ ist es daher belanglos, welche Wahl $J(\phi) = \theta J_1 + (1-\theta)J_2$ wir in (4.6) treffen, die Vieldeutigkeit hebt sich in (4.5) gerade wieder weg. Undurchsichtiger wird die Situation dagegen an den Sprungstellen von $\partial G / \partial J^{(*)}$. Es werden dann nämlich in (4.6) nicht alle Werte von ϕ angenommen. Insbesondere ist also im Fall von spontaner Symmetriebrechung $V_{\text{eff}}(\phi)$ gemäß (3.5/6) für $|\phi| < R_0$ überhaupt nicht definiert, wobei

$$R_0 := \lim_{f \rightarrow 0} |\langle \phi(x) \rangle_f|$$

In der Thermodynamik, wo Phasenübergänge gerade als Unstetigkeiten in den Ableitungen thermodynamischer Potentiale definiert werden, ist dieses Problem natürlich längst bekannt. Als Ausweg wird in den Lehrbüchern die sog. Maxwell-Konstruktion angeboten. In einem axiomatischeren Rahmen, der nur die Konvexitätseigenschaft thermodynamischer Potentiale benutzt, wurde dieses Verfahren von [Wightman 1979] mit Hilfe der sog. Konvex-Konjugation systematisiert. Leider setzt sich die Übernahme dieser Begriffsbildungen auf die Feldtheorie nur sehr langsam durch. Die alternative Definition lautet [Symanzik 1970; Iliopolous et al. 1975; Börner, Seiler 1984; Roepstorff 1985; Slade 1986; O'Rai feartaigh et al. 1986]:

$$V_{\text{eff}}(\phi) := \sup_f (f \cdot \phi - G(f)) \quad (4.7)$$

Folgende Eigenschaften der neuen Definition sind sofort einzusehen:

1. Ist G in der Umgebung einer Stelle $J(\phi)$, an der das Supremum angenommen wird, differenzierbar, so folgt $(\partial G / \partial J)(J(\phi)) = \phi$, d.h. wir erhalten die ursprüngliche Definition.
2. V_{eff} ist in jedem Fall ebenfalls konvex. Bereiche mit $\partial V_{\text{eff}} / \partial \phi = \text{const.}$ entsprechen Sprungstellen in $\partial G / \partial J$ und umgekehrt, d.h. die Maxwell-Konstruktion ist automatisch inkorporiert.

(*) Einseitige Richtungsableitungen konvexer Funktionen existieren im Inneren ihrer Definitionsbereiche immer.

3. Die neue Definition ist stabil unter Grenzwertbildungen, also insbesondere unter dem thermodynamischen Limes. Im endlichen Volumen stimmt sie nach 1. mit der alten Definition überein.
4. Die Konvex-Konjugierte von $V_{\text{eff}}(\phi)$ ist gerade wieder $G(J)$, d.h. die physikalischen Informationsgehalte von G und V_{eff} sind absolut gleichwertig.

Es ist insbesondere der letzte Punkt, den ich hier betonen möchte. Er bedeutet, daß sich aus dem effektiven Potential keine zusätzlichen Eigenschaften (etwa die Existenz metastabiler Zustände betreffend) ablesen lassen, die nicht schon in $G(J)$ codiert wären. Konkret ist spontane Magnetisierung äquivalent zu einer flachen Talsohle von V_{eff} . Der Durchmesser der Talsohle ist gerade gleich dem Sprung von $\partial G / \partial J$, also dem doppelten Betrag der spontanen Magnetisierung.

Ergänzend sei bemerkt, daß in phänomenologischen, van-der-Waals-artigen Ansätzen zur Beschreibung metastabiler Zustände in der Thermodynamik des öfteren auch nicht-konvexe Potentiale auftreten. Durch eine geeignet zu interpretierende Legendre-Transformation wie in (3.5/6) lassen sie sich jedoch nur erhalten, wenn wir von einer mehrwertigen Gibbsfunktion $G(J)$ ausgehen, so daß auch den metastabilen Zuständen (hier etwa denen mit positiver Magnetisierung bei negativem J) eine freie Energie zugeordnet wird (siehe z.B. [Callen 1960]). Wiewohl dies eine diskussionswürdige Alternative wäre, muß man leider festhalten, daß sie im statistischen Zugang zur Gleichgewichts-Thermodynamik nicht auftreten kann [Lanford, Ruelle 1969]. Insbesondere liefert das Funktionalintegral nur eindeutige Funktionen $G(J)$. Vorschläge, $G(J)$ durch analytische Fortsetzung in der Umgebung der Sprungstellen von $\partial G / \partial J$ mehrdeutig zu machen, entbehren meines Wissens einer theoretischen Fundierung^(*). Im übrigen sind sie nicht geeignet, die in der Störungstheorie auftretenden nicht-konvexen effektiven Potentiale richtig zu interpretieren, wie ich nun kurz erläutern will.

Wie bereits von [Nambu 1968] bemerkt, handelt es sich bei der "Loop"-Entwicklung um eine Entwicklung in Potenzen von $\hbar$, falls im Funktionalintegral die euklidische Wirkung durch $\hbar$ dividiert wird. Wenn wir $\hbar$ als eigenständigen Parameter in V_{eff} mitführen, so ist $V_{\text{eff}}(\phi, \hbar)$ zwar für jedes feste $\hbar$ eine konvexe Funktion von ϕ , aber die Ableitungen $\partial V_{\text{eff}} / \partial \hbar$ brauchen dies selbstverständlich

(*) Für eine kritische Diskussion dieser Frage siehe z.B. [Münster 1969]

nicht mehr zu sein. Selbst wenn die Taylor-Reihe

$$V_{\text{eff}}(\phi, \hbar) = \sum_n \frac{1}{n!} V_{\text{eff}}^{(n)}(\phi) \hbar^n \quad (4.8)$$

konvergent wäre, könnte also eine Approximation durch die ersten paar Glieder für $\hbar = 1$ durchaus ein nicht-konvexes Ergebnis liefern. Umgekehrt würde ich daher meinen, daß diese Approximation höchstens an solchen Stellen ϕ vertrauenswürdig ist, an denen sie mit ihrer konvexen Hülle übereinstimmt. Das Ziehen detaillierter physikalischer Schlußfolgerungen aus der Gestalt einer "1-Loop"-Näherung für V_{eff} im nicht-konvexen Bereich halte ich daher für ziemlich gewagt. Dies betrifft insbesondere die Interpretation relativer Minima als metastabile Zustände ("falsche Vacua") oder gar die Voraussage einer Zeitentwicklung für den Übergang vom falschen zum wahren Vakuum aufgrund eines naiven Bilds vom "den-Berg-hinunterrollen", wie es zur Beschreibung des "inflationären Universums" gern benutzt wird (eine diesbezügliche Kritik ist auch in [Börner, Seiler 1984] und [Mazenko et al. 1985] zu finden).

Zusätzlich zu diesen allgemeinen Argumenten kommt die Tatsache, daß in dem Bereich von ϕ , in dem das klassische Potential $V(\phi)$ nicht mit seiner konvexen Hülle übereinstimmt^(*), die allgemein angegebene 1-Teilchen-irreduzible Loop-Entwicklung (siehe z.B. [Itzykson Zuber 1980; Ramond 1981]) für $V_{\text{eff}}(\phi)$ ungültig wird. Genauer trifft die störungstheoretische Invertierbarkeit von (4.6), die hierzu benötigt wird [Jackiw 1974], dann nicht zu, da es bereits in nullter Ordnung keine Lösung $J(\phi)$ mehr gibt. In der Tat kommt der Beitrag 0-ter Ordnung unzweifelhaft vom Maximum der Wirkung (nach der Laplace-Methode, siehe z.B. [Erdelyi 1956]), d.h.

$$\begin{aligned} G^{(0)}(J) &\equiv \lim_{\hbar \downarrow 0} G(J, \hbar) \\ &= \sup_{\phi} (\phi J - V(\phi)) \end{aligned} \quad (4.9)$$

$G^{(0)}(J)$ ist also gerade die Konvexkonjugierte des klassischen Potentials $V(\phi)$, und man überlegt sich leicht, daß die Stellen ϕ , an denen $V(\phi)$ von seiner konvexen Hülle abweicht, im Wertebereich der Ableitungen $\partial G^{(0)} / \partial J$ nicht auftreten (d.h. sie werden übersprungen). Schließlich ergibt sich das effektive Potential in der 0-ten Näherung ("Tree-Approximation") nach der Definition (4.7) als Bi-Konvexkonjugierte von $V(\phi)$, d.h. gerade als konvexe Hülle des

(*) in unseren Beispielen für $|\phi| < v$

klassischen Potentials. (Es ist übrigens klar, daß $G^{(0)}(J)$ und $V_{\text{eff}}^{(0)}(\phi)$ als Limes konvexer Funktionen für $\hbar \rightarrow 0$ selbst wieder konvex sein müssen, was hiermit der Fall ist). Die Terme n-ter Ordnung von $V_{\text{eff}}(\phi)$ ergeben sich für ϕ im Bereich der Talsohle nun einfach aus der Tatsache, daß dort $V_{\text{eff}}(\phi) = G(0)$ gilt, d.h. als Summe aller zusammenhängenden n-Loop-Graphen bei $J = 0$ (für die $P(\phi)_2$ -Theorie wurde dies von [Slade 1986] streng bewiesen). Abschließend sei bemerkt, daß die obigen Argumente auch in einer renormierten Theorie gültig bleiben, wenn wir ϕ durch die renormierte Variable $\phi_R = Z^{-1/2} \phi$ ersetzen, wobei der Faktor Z von der Wellenfunktionsrenormierung kommt. Da Z nur von der Renormierungsskala und den Kopplungskonstanten abhängt, nicht aber von ϕ selbst, ist auch das renormierte effektive Potential als Funktion von ϕ_R konvex und daher schließlich für jeden existierenden Kontinuums-limes.

4.2. Verallgemeinerte Clausius-Clapeyron und Ehrenfest-Gleichungen

Es wird vielfach behauptet, daß aufgrund des Coleman-Weinberg Mechanismus [Coleman, Weinberg 1973] der Phasenübergang von der Higgsphase zur Coulombphase von erster Ordnung sein sollte, da der Ordnungsparameter $\langle \Phi \rangle_J = 0$ dort diskontinuierlich auf Null springt. Diese Behauptung fußt auf einer 1-Loop-Rechnung, die in der Nähe der Phasentrennlinie ein effektives Potential mit einem lokalen Minimum bei $\Phi = 0$ und einem weiteren bei $\Phi \neq 0$ liefern soll. In der Higgsphase liegt das Minimum bei $\Phi \neq 0$ tiefer, woraus man spontane Symmetriebrechung folgert. Auf der Phasentrennlinie liegen beide Minima gleich hoch, und in der Coulombphase ist schließlich das absolute Minimum bei $\Phi = 0$ zu finden. Man sagt, daß das "unsymmetrische Vakuum" bei $\Phi \neq 0$ metastabil wird und macht sogar Voraussagen über die Zeitentwicklung für den Übergang über den angeblich dazwischen liegenden Potentialberg ins stabile Vakuum bei $\Phi = 0$ (für eine Übersicht über die verschiedenen Szenarien in der Kosmologie siehe z.B. [Brandenberger, 1985]).

Nach den Argumenten des vorherigen Abschnitts kann der Sachverhalt so nicht richtig sein! Wenn überhaupt, so hat das effektive Potential eine flache Talsohle, die sich bei einem Phasenübergang 1. Ordnung unstetig auf den Punkt $\Phi = 0$ zusammenzieht. Weiter wissen wir, daß zumindest im abelschen Higgsmodell die spontane Symmetriebrechung eichabhängig ist. ($V_{\text{eff}}(\Phi)$ ist übrigens klarerweise ebenfalls eichabhängig [Jackiw 1974]). Falls Gribov-Kopien auftreten, zeigt sie möglicherweise eine unechte Phasentrennlinie an (oder verschwindet überhaupt), und in jedem Fall liefert die Loop-Entwicklung eichabhängiger Green-Funktionen dann falsche Ergebnisse [Nill 1986].

Aus all diesen Gründen scheint es mir sehr angebracht, die Frage nach der Ordnung des Phasenübergangs, wenn auch nicht mathematisch streng, so doch zumindest mit Hilfe eines logisch widerspruchsfreien und eichinvarianten störungstheoretischen Konzepts noch einmal aufzurollen. Die Idee hierbei wird sein, erst gar nicht einen äußeren Strom J einzuführen, sondern direkt nach Unstetigkeiten in den Ableitungen der Gibbs'schen freien Energiedichte $G(J = 0, e^2, \lambda, \bar{\epsilon})$ in den Parametern $e^2, \lambda, \bar{\epsilon}$ (s. (1.1-3)) zu fragen, d.h. nach Sprüngen in Erwartungswerten und Korrelationen entsprechender eichinvarianter Observabler. Da die nun folgenden Überlegungen auf allgemeine thermodynamische Modelle anwendbar sind, will ich sie in einer abstrakteren Notation abhandeln.

Wir betrachten allgemeine Gibbsfunktionen

$$G : U \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$$

wobei U eine offene Menge im Raum der intensiven Parameter $\mathbb{R}^{n+1}$ ist, von denen wir einen (etwa x^0) mit der Temperatur T identifizieren können. Wir folgen der Terminologie von [Ehrenfest 1933] und nennen einen Punkt $x \in U$ einen Phasenübergang k -ter Ordnung, wenn G in einer Umgebung von x $(k-1)$ -mal stetig differenzierbar ist, während die k -ten partiellen Ableitungen in x nur einseitig existieren und daher Sprünge aufweisen. Betrachten wir zunächst den Fall $k = 1$ und nehmen an, daß die Menge Σ der Phasenübergänge 1. Ordnung in U eine n -dimensionale C^1 -Hyperfläche bildet, die U in zwei offene Hälften U^+ und U^- spaltet, d.h. $U = U^+ \cup \Sigma \cup U^-$. Weiter wollen wir annehmen, daß die einseitigen Limiten der Differentiale

$$(dG^\pm)(x) := \lim_{\substack{y \rightarrow x \\ y \in U^\pm}} dG(y) \quad (4.10)$$

lokal gleichmäßig in x für alle $x \in \Sigma$ existieren (d.h. das Koexistenzgebiet soll nicht durch einen weiteren Phasenübergang 1. Ordnung unterteilt sein). Mit Hilfe elementarer Analysis folgt hieraus, daß die Einschränkung G^Σ von G auf Σ eine C^1 -Funktion ist und daß

$$\langle dG^+ | \xi \rangle = \langle dG^\Sigma | \xi \rangle = \langle dG^- | \xi \rangle \quad (4.11)$$

für jeden Tangentenvektor ξ an Σ , d.h. die Richtungsableitungen von G tangential an Σ haben keinen Sprung^(*). Dies führt in folgendem Sinne zu verallgemeinerten Clausius-Clapeyron Gleichungen: Es sei $\partial_i G = \partial G / \partial x^i$ und

$$\Delta \partial_i G = \partial_i G^+ - \partial_i G^- \quad (4.12)$$

der Sprung in der i -ten partiellen Ableitung von G . Aus (4.11) folgt unmittelbar

$$\sum_{i=0}^n (\Delta \partial_i G)(x) \xi^i = 0 \quad (4.13)$$

(*) Der Beweis ist einfach aber wenig instruktiv und sei daher dem Leser überlassen. Die Idee ist, daß der Limes $y \rightarrow x$ der Richtungsableitungen parallel zu Σ gerade durch die Richtungsableitung der Grenzfunktionen $G_+ = G_-$ gegeben und daher eindeutig ist. Die Voraussetzung "lokal gleichmäßig" ist bezüglich angepaßter Koordinaten $\tilde{x}$ gemeint, so daß Σ z.B. durch $\tilde{x}^0 = 0$ gegeben ist.

d.h. die auf Σ definierte 1-Form $(\Delta \partial_i G) dx^i = dG^+ - dG^-$ annulliert jeden Tangentenvektor ξ an Σ . Im Fall $n + 1 = 2$ mit $x^0 = T$ (Temperatur) und $x^1 = P$ (Druck) ist Σ eine Kurve in der P-T-Ebene, und wir erhalten aus (4.12)

$$\frac{dP}{dT} = - \frac{\Delta(\partial G / \partial T)}{\Delta(\partial G / \partial P)} = \frac{\Delta S}{\Delta V}$$

also die übliche Clausius-Clapeyron Gleichung für einen Phasenübergang 1. Ordnung mit diskontinuierlicher Entropie- und Volumenänderung. Der allgemeine Fall (4.13) läßt sich griffig in die Formel fassen, daß der "Sprungvektor" $(\Delta \partial_0 G, \dots, \Delta \partial_n G)$ senkrecht auf der Koexistenzfläche Σ steht.

Die Gleichung (4.11) können wir nun auch auf Sprünge in höheren Ableitungen von G verallgemeinern, wobei es zweckmäßig ist, koordinatenunabhängig vorzugehen. Es sei $(V_0, \dots, V_n)$ ein Satz linear unabhängiger C^μ -Vektorfelder auf U , $\mu \geq 0$, so daß die Vektoren $v_1(x), \dots, v_n(x)$ für alle $x \in \Sigma$ gerade den Tangentialraum $T_x \Sigma$ aufspannen (konsistenterweise müssen wir hierzu Σ als $C^{\mu+1}$ -Hyperfläche voraussetzen). Weiter bezeichne von jetzt ab $G_{\alpha, \beta, \gamma, \dots} = (\dots V_\gamma \circ V_\beta \circ V_\alpha)(G)$ die Richtungsableitungen entsprechender Ordnung von G längs der v 's^(*). Unter der zu (4.10) analogen Annahme, daß die Limiten $G_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}^\pm(x)$ für alle $m \leq \mu + 1$ lokal gleichmäßig in $x \in \Sigma$ existieren, gilt dann in Verallgemeinerung von (4.11) :

$$G_{i_1, \dots, i_m}^+ (x) = G_{i_1, \dots, i_m}^\Sigma (x) = G_{i_1, \dots, i_m}^- (x) \quad (4.14)$$

Hier und im folgenden laufen lateinische Indizes $i, j, k \dots$ "parallel" zu Σ , d.h. nur von 1 bis n , während griechische Indizes $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ von 0 bis n laufen. Mit der Notation (4.12) ergibt dies

$$\Delta G_{i_1, \dots, i_m} (x) = 0 \quad \forall x \in \Sigma \quad (4.15)$$

wobei ich erwähnen möchte, daß (4.15) selbstverständlich erst recht gilt, wenn Σ eine Trennfläche für einen Phasenübergang höherer Ordnung ist. Der

(*) Partielle Ableitungen längs der Koordinatenlinien werden weiter mit $\partial_i G$, $\partial_i \partial_j G$, etc. bezeichnet.

vorherige Spezialfall $m = 1$ lässt sich nach Einführung der zu den v_α dualen Basis von Kovektorfeldern (1-Formen) θ^α auch schreiben als

$$(\Delta \partial_\alpha G) dx^\alpha = \Delta G_0 \theta^0 \quad (4.16)$$

d.h. der Sprungvektor reduziert sich bezüglich θ^0 zu einer skalaren Funktion ΔG_0 auf Σ . Phasenübergänge 1. Ordnung sind also äquivalent zu $\Delta G_0 \neq 0$.

Falls dies in einem Punkt $\bar{x} \in \Sigma$ zutrifft, können wir (4.15) verwenden, um Σ störungstheoretisch in der Nähe von $\bar{x}$ zu bestimmen. Hierzu nehmen wir o.E. an, daß $\Delta \partial_0 G(x) \neq 0$ und somit Σ lokal durch eine Gleichung $x^0 = x^0(x^1, \dots, x^n)$ festgelegt werden kann. Als Ansatz für die v_α verwenden wir daher $v_0 = \partial/\partial x^0$ und $v_i = \partial/\partial x^i + (\partial x^0 / \partial x^i) \partial/\partial x^0$. Hiermit lässt sich (4.15) immer in der folgenden Form auflösen:

$$\frac{\partial^m x^0}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_m}}(\bar{x}) = (\Delta \partial_0 G(\bar{x}))^{-1} f_{i_1, \dots, i_m}(\bar{x}) \quad (4.17)$$

wobei $f_{i_1, \dots, i_m}$ nur noch von Ableitungen von x^0 bis zur Ordnung $m-1$ sowie von Ableitungen von G abhängt. Wir erhalten also sukzessive alle Ableitungen von x^0 an der Stelle $\bar{x}$ (und damit eine störungstheoretische Bestimmung von Σ), falls wir die Sprünge in den Ableitungen von G kennen.

Ich will mich nun dem Fall zuwenden, daß der Punkt $\bar{x} \in \Sigma$, um den wir entwickeln wollen, kein Phasenübergang erster Ordnung ist, sondern vielmehr $\Delta G_0(\bar{x}) = 0$ gilt. Um zu entscheiden, ob der Phasenübergang auch in der Nachbarschaft von $\bar{x}$ von höherer als erster Ordnung ist, müssen wir die Ableitungen von ΔG_0 auf Σ betrachten. Da wir das Δ -Symbol mit den Richtungsableitungen längs der v_i parallel zu Σ vertauschen dürfen, erhalten wir als notwendige Bedingung für $\Delta G_0 = 0 \quad \forall x \in \Sigma$ (d.h. Phasenübergang zweiter oder höherer Ordnung auf ganz Σ)

$$\Delta G_{0, i_1, \dots, i_m} = 0 \quad \forall x \in \Sigma \quad (4.18)$$

Dies ist eine Verallgemeinerung der sog. Ehrenfest-Gleichungen [Ehrenfest 1933] für eine Phasentrennkurve 2. Ordnung im P-T-Diagramm. Um dies zu sehen, wählen wir $v_0 = \partial/\partial P$ und $v_1 = \partial/\partial T + (dP/dT) \partial/\partial P$ und erhalten aus (4.18)

$$\begin{aligned} 0 = \Delta G_{0,1} &\equiv \Delta \frac{\partial^2 G}{\partial P \partial T} + \frac{dP}{dT} \Delta \frac{\partial^2 G}{\partial P^2} \\ &= \Delta \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P + \frac{dP}{dT} \Delta \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T \end{aligned}$$

also eine Gleichung für die Sprünge im isobaren Ausdehnungskoeffizienten und in der isothermen Kompressibilität. Falls wir bei gleichem V_1 , die Wahl $V_0 = 2/2T$ treffen, so ergibt sich statt dessen

$$0 = -\frac{1}{T} \Delta C_P + \frac{dP}{dT} \Delta \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P$$

wobei $C_P = T (\partial S / \partial T)_P$ die isobare Wärmekapazität ist. Diese Gleichungen sind auch in Lehrbüchern wie z.B. [Landau, Lifschitz 1959; Callen 1960; Münster 1969] zu finden.

Die allgemeinere Formulierung (4.15/18) gestattet uns jedoch noch weitere Aussagen. Zunächst erkennen wir unmittelbar, daß die "Sprungmatrix" $\Delta G_{\mu\nu}$ höchstens noch ein nicht-verschwindendes Matrixelement ΔG_{00} hat. Wegen $\Delta G_\mu = 0$ transformiert sich $\Delta G_{\mu\nu}$ außerdem wie ein symmetrischer Tensor, und wir dürfen daher basisunabhängig folgern, daß die Sprungmatrix der zweiten Ableitungen höchstens einen Eigenwert ungleich Null hat. Der zugehörige Eigenvektor steht senkrecht auf dem Tangentialraum von Σ , welcher somit den Nulleigenraum bildet. Diese Konsistenzbedingung für $\Delta G_0 \equiv 0$ können wir somit direkt in den Koordinaten x^μ an der Matrix $\Delta \partial_\mu \partial_\nu G(\bar{x})$ überprüfen. Falls sie im Punkt $\bar{x}$ tatsächlich zutrifft, dürfen wir umgekehrt folgern, daß zumindest auch die erste Ableitung von ΔG_0 (als Funktion auf Σ) in $\bar{x}$ verschwindet. Zur Überprüfung der höheren Ableitungen von ΔG_0 können wir nun analog wie in (4.17) vorgehen, falls wir (4.18) anstatt (4.15) benützen (*). Da außerdem die Gleichungen (4.15) nach wie vor gelten müssen, ergeben sich jetzt zusätzliche Konsistenzbedingungen für die Sprünge in den höheren Ableitungen von G . Im nächsten Abschnitt werde ich dieses Programm bis zu einer 2-loop-Näherung vorführen.

(*) Es muß hierzu $\Delta G_{00}(x) \neq 0$ gelten, so daß o.E. etwa $\Delta \partial_0 G_0(\bar{x}) \neq 0$.

4.3. Kein Phasenübergang 1. Ordnung in der 2-Loop-Näherung

Um die Konzepte des vorherigen Abschnitts störungstheoretisch nutzbar zu machen, müssen wir uns eindeutig auf einen Entwicklungsparameter festlegen. Da wir die Coulombphase und die Higgsphase in einem gemeinsamen Formalismus behandeln wollen, bietet sich unter den konventionellen Methoden nur die sog. "Loop"-Entwicklung an. Wie bereits erwähnt, handelt es sich hierbei um eine Entwicklung in Potenzen von $\hbar$, wobei wir im Funktionalintegral die euklidische Wirkung durch $\hbar$ zu dividieren haben. In diesem Sinne spielt also $\hbar$ hier die Rolle der Temperatur eines klassischen statistischen Systems. Die grundlegende Idee besteht im folgenden darin, die Loop-Entwicklung lediglich als eine asymptotische Reihe zu begreifen und nicht etwa für $\hbar = 1$ ernst zu nehmen.

Um einen wohldefinierten Limes $\hbar \rightarrow 0$ zu erhalten, wird die freie Energiedichte jetzt folgendermaßen definiert:

$$G_{\Lambda}(\sigma, e^2, \lambda, \hbar) := \frac{\hbar}{|\Lambda|} \log \int D_{\Lambda} \frac{\vec{A}}{\sqrt{2\pi\hbar}} D_{\Lambda} \frac{\Phi}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{\frac{1}{\hbar} S_{\Lambda}(\vec{A}, \Phi)} \quad (4.19)$$

wobei S_{Λ} in Abhängigkeit von e^2 , σ und λ in (1.1-3) definiert wurde. Durch Reskalierung der Integrationsvariablen mit $\sqrt{\hbar}$ ergibt sich folgende Identität

$$G_{\Lambda}(\sigma, e^2, \lambda, \hbar) = \hbar G_{\Lambda}(\sigma, \hbar e^2, \hbar \lambda, 1) \quad (4.20)$$

Zur Untersuchung der Phasenstruktur im Sinne von § 4.2. ist daher von den Parametern e^2 , λ und $\hbar$ einer redundant. Da wir einerseits in $\hbar$ entwickeln und andererseits eventuelle Unterschiede zwischen $e^2 = 0$ und $e^2 > 0$ aufspüren wollen, werde ich λ im weiteren nur noch als einen "unbeteiligten", festgehaltenen Parameter betrachten (wir könnten o.E. $\lambda = 1$ setzen). Ich wähle also die Identifizierung $(x^0, x^1, x^2) = (\sigma, e^2, \hbar)$ und suche für die Phasentrennfläche eine Gleichung der Gestalt $\sigma = \sigma_c(e^2, \hbar)$. Die Entwicklung nach $\hbar$ erfolgt mit der Laplace-Methode (siehe z.B. [Erdélyi 1956]) und der thermodynamische Limes wird dann ohne explizite Erwähnung termweise durchgeführt^(*). Als nullte Näherung ergibt sich sofort das Supremum der klassischen Wirkung, d.h.

(*) Dies bedarf natürlich einer Rechtfertigung, die ich hier schuldig bleiben muß.

$$\begin{aligned}
 G^{(0)} &\equiv G(\epsilon, e^2, \hbar = 0) \\
 &= \sup_{\phi} \left(-\frac{\lambda}{4} |\phi|^4 + \frac{\epsilon}{2} |\phi|^2 \right) \\
 &= \frac{\lambda}{4} R_0^4(\epsilon)
 \end{aligned} \tag{4.21}$$

wobei $R_0^2(\epsilon) = 0$ für $\epsilon \leq 0$, und $R_0^2(\epsilon) = \epsilon / \lambda$ für $\epsilon \geq 0$ steht. Für die höheren Ordnungen müssen wir die Wirkung wie üblich um ihr Maximum bei $A = 0$, $\phi = R_0(\epsilon)$ entwickeln. Hierzu führen wir die Variable ψ gemäß $\phi = R_0(\epsilon) + \sqrt{\epsilon} \psi$ ein und erhalten nach der Skalierung $A \rightarrow \sqrt{\epsilon} A$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\hbar} S_{\Lambda}(\hbar, \phi) &= \frac{|\Lambda|}{\hbar} G^{(0)} - \frac{1}{2} \langle (\hbar, \psi) | C_{\Lambda}^{-1} | (\hbar, \psi) \rangle_{\Lambda} \\
 &+ \sum_{\nu \geq 3} \frac{(\sqrt{\epsilon})^{\nu-2}}{\nu!} (\hbar, \psi)^{\nu} S_{\Lambda}^{(\nu)}
 \end{aligned} \tag{4.22}$$

wobei die Summe als Kurzschreibweise für die weitere Taylorentwicklung zu lesen ist. Die inverse Kovarianz C_{Λ}^{-1} ist durch die 2. Funktionalableitung (Hessematrix) von $-S_{\Lambda}$ am Minimum gegeben:

$$C_{\Lambda}^{-1} = \begin{pmatrix} d^* d + \frac{1}{\alpha} d d^* + e^2 R_0^2(\epsilon) & 0 & e \nu d \\ 0 & \Delta + m_1^2(\epsilon) & 0 \\ e \nu d^* & 0 & \Delta + m_2^2(\epsilon) \end{pmatrix}_{\Lambda} \tag{4.23}$$

wobei $\psi = (\psi_1, \psi_2)$ in seine Komponenten aufgespalten wurde und $m_{\alpha}^2(\epsilon)$ die Eigenwerte der Hessematrix des klassischen Potentials am Minimum $\phi = R_0(\epsilon)$ sind:

$$m_1^2(\epsilon) = 3\lambda R_0^2(\epsilon) - \epsilon, \quad m_2^2(\epsilon) = \lambda R_0^2(\epsilon) - \epsilon$$

Um die Kovarianz C_{Λ} zu berechnen schreibt man C_{Λ}^{-1} in der Form

$$C_{\Lambda}^{-1} = (1 + \epsilon_{\Lambda}) D_{\Lambda} \tag{4.24}$$

wobei D_{Λ} der blockdiagonale Anteil ist. Hiermit erhält man

$$C_{\Lambda} = D_{\Lambda}^{-1} \sum_{\nu=0}^{\infty} (-\epsilon_{\Lambda})^{\nu}$$

Die geometrische Reihe kann aufsummiert werden und man erhält (*)

$$C_A = \begin{pmatrix} (\Delta + e^2 R_0^2)^{-1} d^* \Delta^{-1} d + \alpha \frac{\Delta + m_2^2}{K} d \Delta^{-1} d^* & 0 & -\frac{\alpha e R_0}{K} d \\ 0 & (\Delta + m_1^2)^{-1} & 0 \\ -\frac{\alpha e R_0}{K} d^* & 0 & \frac{\Delta + \alpha e^2 R_0^2}{K} \end{pmatrix}_A \quad (4.25)$$

mit
$$K := \Delta^2 + m_2^2 (\Delta + \alpha e^2 R_0^2)$$

Nach (4.22) erhalten wir in 1. Ordnung von $\hbar$ den Logarithmus der Zustandssumme eines Gauß'schen Integrals mit Kovarianz C_A . Da aber eigentlich das eichfixierte Funktionalintegral noch durch den Eichmittelwert

$$\int D_A \left(\frac{\chi}{\sqrt{2\pi}} \right) e^{S_{gf,A}(\Phi + d\chi)} = [\det(\alpha^{-1} \Delta_A^2)]^{-1/2}$$

der Eichfixierung normiert werden muß, erhalten wir insgesamt

$$\begin{aligned} G_A^{(1)} &\equiv \frac{\partial}{\partial \hbar} \bigg|_0 G_A(\Phi, e^2, \hbar) \\ &= \frac{1}{i\hbar} \left[\log(\det C_A)^{1/2} + \log(\det \frac{\Delta_A^2}{\alpha})^{1/2} \right] \end{aligned} \quad (4.26)$$

Mit (4.24) und der Identität $\log \det = \text{Tr} \log$ folgt:

$$\log [\det C_A]^{1/2} = -\frac{1}{2} \log \det D_A - \frac{1}{2} \text{Tr} \log (1 + \mathcal{E}_A)$$

Die Taylorreihe $\text{Tr} \log (1 + \mathcal{E}_A) = -\text{Tr} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} (-\mathcal{E}_A)^\nu$ kann abermals aufsummiert werden (es tragen nur die geraden Potenzen zur Spur bei), und wir erhalten

(*) Berücksichtigt man, daß entweder $m_2^2(\Phi) = 0$ oder $R_0(\Phi) = 0$, so reduziert sich (4.25) auf die aus der Literatur bekannte Gestalt (siehe z.B. [Lee 1972]). Später werden wir o.E. in die Landau-Eichung gehen, d.h. $\alpha = 0$ setzen.

$$\lim_{\lambda} \frac{1}{|\lambda|} \log (\det C_\lambda)^{1/2}$$

$$= -\frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \left\{ (d-1) \ln (\tilde{\Delta} + e^2 R_0^2) + \ln \left(\frac{\tilde{\Delta}}{\alpha} + e^2 R_0^2 \right) + \ln (\tilde{\Delta} + m_i^2) \right.$$

$$\left. + \ln (\tilde{\Delta} + m_i^2) + \ln [1 - \alpha e^2 R_0^2 \tilde{\Delta} (\tilde{\Delta} + \alpha e^2 R_0^2)^{-1} (\tilde{\Delta} + m_i^2)^{-1}] \right\}$$

mit $\tilde{\Delta}(k) = \sum_{\mu=1}^d (2 - 2 \cos k_\mu)$ als Fouriertransformierte des Laplace-Operators auf dem Gitter. Eingesetzt in (4.26) ergibt dies schließlich ^(*):

$$G^{(1)}(\xi, e^2) = \begin{cases} -\frac{1}{2} \int [(d-1) \ln (\tilde{\Delta} + e^2 R_0^2(\xi)) + \ln (\tilde{\Delta} + m_H^2(\xi))] , & \xi \geq 0 \\ -\frac{1}{2} \int [(d-2) \ln \tilde{\Delta} + 2 \ln (\tilde{\Delta} + m_H^2(\xi))] , & \xi \leq 0 \end{cases}$$

(4.27)

mit

$$R_0^2(\xi) = \max \{ 0, \xi/2 \}$$

$$m_H^2(\xi) = 3/2 R_0^2(\xi) - \xi$$

Hierbei haben wir ausgenutzt, daß für $\xi \geq 0$ die Masse der "Goldstone-Anregung" $m_2 = 0$ ist, während für $\xi \leq 0$ die "Photonmasse" $e^2 R_0^2 = 0$ ist. Man beachte auch, daß die α -Abhängigkeit jetzt verschwunden ist, so wie es sein muß.

Gleichung (4.27) ist der störungstheoretische Nachweis des Higgsmechanismus. In der Higgsphase ($\xi > 0$) haben wir pro Impuls $(d-1)$ massive Photon-Moden und eine massive Higgs-Mode, in der Coulombphase ($\xi < 0$) dagegen $(d-2)$ masselose Photon-Moden und zwei massive Higgs-Moden. Wir schließen hieraus, daß im klassischen Limes $\hbar \rightarrow 0$ die Phasentrennfläche ξ_c gegeben ist durch $\xi_c(e^2, \hbar = 0) = 0$.

Als unmittelbare weitere Konsequenz erhalten wir außerdem, daß der Phasenübergang im Punkt $\bar{x} = (\xi = 0, e^2, \hbar = 0)$ für alle $e^2 \gg 0$ nicht von erster Ordnung

(*) Ich werde in Zukunft das Integrationsmaß $(2\pi)^{-d} d^d k$ im Impulsraum aus Bequemlichkeit weglassen.

ist. In der Tat folgt aus (4.21)

$$\partial_{\bar{e}} G(\bar{e}, e^2, \hbar=0) = \begin{cases} -\bar{e}/2\lambda & , \quad \bar{e} \geq 0 \\ 0 & , \quad \bar{e} \leq 0 \end{cases}$$

$$\partial_{e^2} G(\bar{e}, e^2, \hbar=0) = 0 \quad (4.28)$$

Wenn wir in der Notation von § 4.2 $U^+ = \{(\bar{e}, e^2, \hbar) / \bar{e} > \bar{e}_c(e^2, \hbar)\}$ und $U^- = \{(\bar{e}, e^2, \hbar) / \bar{e} < \bar{e}_c(e^2, \hbar)\}$ setzen, so ergibt sich $\partial_{\mu} G^+(\bar{x})$ im Limes $\bar{e} \searrow 0$ und $\partial_{\mu} G^-(\bar{x})$ im Limes $\bar{e} \nearrow 0$. Wir erhalten daher sofort $\Delta \partial_{\bar{e}} G(\bar{x}) = \Delta \partial_{e^2} G(\bar{x}) = 0$. Nach (4.27) hat aber auch die Ableitung nach $\hbar$ in $\bar{x}$ keinen Sprung:

$$\partial_{\hbar} G^+(\bar{x}) = \partial_{\hbar} G^-(\bar{x}) = -\frac{d}{d\hbar} \int \ln \tilde{\Delta}(k)$$

und daher ist insgesamt der Sprungvektor $\Delta d G(\bar{x}) = 0$. Da diese Aussage naiven Interpretationen der Standardliteratur widerspricht, will ich sie noch einmal gesondert festhalten:

Die 1-Loop-Näherung zur eichinvarianten freien Energiedichte $G(\bar{e}, e^2, \hbar)$ liefert keinen Nachweis für einen Phasenübergang 1. Ordnung.

Um nachzuprüfen, ob für $\hbar > 0$ der Phasenübergang vielleicht doch von 1. Ordnung ist, müssen wir uns der Gleichungen (4.18) bedienen. Für die Sprünge in den zweiten Ableitungen von G konnten wir (4.18) jedoch mit (4.15) zu der Aussage vereinen, daß die Sprungmatrix $\Delta G_{\mu\nu}$ koordinatenunabhängig höchstens einen Eigenwert ungleich Null haben darf, falls der Sprungvektor auch in einer Umgebung von $\bar{x}$ verschwinden soll. Um diese Annahme zu widerlegen und auf einen Phasenübergang 1. Ordnung für $(\bar{e}, e^2, \hbar)$ in der Nähe von $\bar{x}$ schließen zu können, müssen wir also $\Delta G_{\mu\nu}(\bar{x})$ bestimmen. Aus (4.28) erhalten wir

$$\Delta \partial_{\bar{e}}^2 G(\bar{x}) = (2\lambda)^{-1} \quad (4.29a)$$

$$\Delta \partial_{\bar{e}} \partial_{e^2} G(\bar{x}) = \Delta \partial_{e^2}^2 G(\bar{x}) = 0 \quad (4.29b)$$

Gleichung (4.27) liefert uns:

$$\begin{aligned} \Delta \partial_{\bar{e}} \partial_{\hbar} G(\bar{x}) &= -\frac{1}{2} \left(\frac{(d-1)e^2}{2} + 2 - (-2) \right) \int \tilde{\Delta}(k)^{-1} \\ &= -\frac{4\lambda + (d-1)e^2}{2\lambda} \int \tilde{\Delta}(k)^{-1} \end{aligned} \quad (4.29c)$$

$$\Delta \partial_{e^2} \partial_{\hbar} G(\bar{x}) = 0 \quad (4.29d)$$

Es verbleibt noch der Sprung $\Delta \mathcal{O}_h^2 G(\bar{x})$ der 2-Loop-Näherung von G zu berechnen. Nach (4.22) gilt:

$$G_\Lambda = (G_\Lambda^{(0)} + \hbar G_\Lambda^{(1)}) = \frac{\hbar}{N} \log \left\langle \exp \left[\sum_{\nu \geq 3} \frac{(\sqrt{\hbar})^{\nu-2}}{\nu!} (H, \psi)^\nu S_\Lambda^{(\nu)} \right] \right\rangle_{C_\Lambda}$$

wobei $\langle \cdot \rangle_{C_\Lambda}$ der Erwartungswert im Gauß'schen Maß mit Kovarianz C_Λ ist. Für die 2-Loop-Näherung folgt in symbolischer Schreibweise

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} G_\Lambda^{(2)}(\epsilon, e^2) &\equiv \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \hbar^2} G_\Lambda(\epsilon, e^2, \hbar=0) \\ &= \frac{1}{2|N|} \left\langle \left[\frac{(H, \psi)^3}{3!} S_\Lambda^{(3)} \right]^2 \right\rangle_{C_\Lambda} + \frac{1}{|N|} \left\langle \frac{(H, \psi)^4}{4!} S_\Lambda^{(4)} \right\rangle_{C_\Lambda} \end{aligned} \quad (4.30)$$

Ich zeige zunächst, daß der zweite Term keinen Sprung bei $\epsilon = 0$ zeigt. Es gilt:

$$\begin{aligned} \frac{(H, \psi)^4}{4!} S_\Lambda^{(4)} &= -\frac{2}{4} \sum_x |\psi(x)|^4 \\ &\quad + \frac{e^4 R_0^2}{24} \sum_{\langle xy \rangle} H_{xy}^4 \\ &\quad + \frac{e^3 R_0}{6} \sum_{\langle xy \rangle} H_{xy}^3 (d\psi_2)_{xy} \\ &\quad - \frac{e^2}{2} \sum_{\langle xy \rangle} \sum_{\alpha=1}^2 H_{xy} \psi_\alpha(x) \psi_\alpha(y) \end{aligned}$$

Zur Berechnung der Gauß'schen Erwartungswerte dürfen wir o.E. in die Landau-Eichung gehen, d.h. $\alpha = 0$ setzen. Die Kovarianz vereinfacht sich dann zu

$$C_{\Lambda, \text{Land}} = \begin{pmatrix} (\Delta + e^2 R_0^2)^{-1} d^* \Delta^{-1} d & 0 & 0 \\ 0 & (\Delta + m_1^2)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & (\Delta + m_2^2)^{-1} \end{pmatrix}$$

Die auftretenden Feynmangraphen sind also alle von der symbolischen Gestalt



wobei die Linien für die Photon-, Higgs- oder Goldstone-Propagatoren stehen können. Für $\delta \rightarrow 0$ werden alle Propagatoren masselos, aber in $d \geq 3$ bleiben die obigen Graphen infrarot-endlich, so daß sich insgesamt stetige Ausdrücke in $\delta = 0$ ergeben.

Ich komme nun zum 1. Term in (4.30) und werde zeigen, daß die dort auftretenden 1-Teilchen-reduziblen Graphen tatsächlich im thermodynamischen Limes eine Unstetigkeit bei $\delta = 0$ erzeugen. Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{(\bar{\psi} \psi)^3}{3!} \zeta_1^{(3)} &= -2 R_0 \sum_x |\psi(x)|^2 \psi_1(x) \\ &+ e \sum_{\langle xy \rangle} \bar{\psi}_{xy} (\psi_2(x) \psi_1(y) - \psi_1(x) \psi_2(y)) \\ &- e^2 R_0 \sum_{\langle xy \rangle} \bar{\psi}_{xy}^2 (S \psi_1)_{xy} \end{aligned}$$

wobei $(S \psi_1)_{xy} = \frac{1}{2} (\psi_1(x) + \psi_1(y))$. In den Feynmangraphen werden daher folgende Vertices auftreten:

$$-2 R_0 \text{ (solid line vertex)}, \quad -2 R_0 \text{ (dashed line vertex)}, \quad e \text{ (wavy line vertex)}, \quad -e^2 R_0 \text{ (sunset vertex)}$$

Die geraden, gepunkteten und gewellten Linien stehen hierbei jeweils für den - bzw. ψ_2 - bzw. A_μ -Propagator. Hiermit ergeben sich folgende 1-Teilchen-irreducible (1PI) 2-Loop-Vakuumgraphen

$$\lambda^2 R_0^2 \text{ (solid circle)}, \quad \lambda^2 R_0^2 \text{ (dashed circle)}, \quad e^2 \text{ (wavy circle)}, \quad e^4 R_0^2 \text{ (sunset circle)}$$

Die 1-Teilchen-reduziblen (1PR) Graphen haben folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} &\lambda^2 R_0^2 \text{ (solid circle connected by solid line)}, \quad \lambda^2 R_0^2 \text{ (dashed circle connected by solid line)}, \quad \lambda^2 R_0^2 \text{ (solid circle connected by dashed line)} \\ &+ \lambda e^2 R_0^2 \text{ (sunset circle connected by solid line)}, \quad \lambda e^2 R_0^2 \text{ (sunset circle connected by dashed line)}, \quad e^4 R_0^2 \text{ (sunset circle connected by wavy line)} \end{aligned}$$

In der Coulombphase ($\epsilon < 0$) gilt $R_0(\epsilon) = 0$, und es verschwinden daher alle 1PR und 1PI Graphen bis auf den ohne R_0 -Vorfaktor. Da er jedoch für $\epsilon \rightarrow 0$ infrarot-endlich bleibt (alle nun folgenden Betrachtungen der IR-Eigenschaften von Feynmandiagrammen beziehen sich explizit auf $d = 4$), ist er insbesondere in $\epsilon = 0$ stetig. Unstetigkeiten können also nur auftreten, wenn im Limes $\epsilon \searrow 0$ (d.h. aus der Higgsphase kommend) ein Graph wie ϵ^{-1} divergiert und diese Divergenz durch den Vorfaktor $R_0^2(\epsilon) = \epsilon/2$ wieder aufgehoben wird. Da auch die übrigen 1PI-Graphen für $\epsilon \searrow 0$ IR-endlich bleiben, brauchen wir uns nur noch um die 1PR-Graphen zu kümmern. Nach den üblichen Impulserhaltungsregeln für Feynmandiagramme steht die jeweilige Verbindungslinie zwischen den beiden "Loops" für den Higgspropagator bei Impuls Null, das heißt z.B.

$$\text{---} \bigcirc \text{---} \text{---} \text{---} = \frac{1}{m_H^2(\epsilon)} \bigcirc \text{---} \text{---} \text{---}$$

und entsprechend für alle anderen Graphen. Das Produkt der beiden 1-Loop-Graphen bleibt klarerweise endlich für $\epsilon \searrow 0$ und

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} \frac{R_0^2(\epsilon)}{m_H^2(\epsilon)} = \frac{1}{22}$$

Um den Sprung zu ermitteln müssen wir also nur noch die 1-Loop-Graphen bei $\epsilon = 0$ berechnen und die kombinatorischen Faktoren bestimmen. Es gilt

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} \bigcirc = \text{---} \bigcirc \text{---} = \int \tilde{\Delta}^{-1}(k)$$

sowie

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} \text{---} \text{---} = (d-1) \int \tilde{\Delta}^{-1}(k)$$

Die kombinatorischen Faktoren ergeben sich in der üblichen Weise aus dem Wick'schen Theorem, und wir erhalten insgesamt

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{Z}_h^2 G(\bar{z}) &= \frac{1}{22} (162^2 + 82e^2(d-1) + e^4(d-1)^2) \left(\int \tilde{\Delta}(k)^{-1} \right)^2 \\ &= \frac{1}{22} \left[(42 + e^2(d-1)) \int \tilde{\Delta}(k)^{-1} \right]^2 \end{aligned} \quad (4.29e)$$

Mit (4.29 a-e) haben wir somit die gesamte Sprungmatrix bestimmt:

$$\Delta \partial_\mu \partial_\nu G(\bar{x}) = \frac{1}{2\lambda} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -c \\ 0 & 0 & 0 \\ -c & 0 & c^2 \end{pmatrix} \quad (4.31)$$

mit

$$c = [4\lambda + e^2(d-1)] \int \chi^{-1}(k)$$

Man sieht sofort, daß sie einen 2-dimensionalen Nullraum hat, der von den Vektoren $(0, 1, 0)$ und $(c, 0, 1)$ aufgespannt wird. Nach den Überlegungen von § 4.2. folgt, daß auch die erste Ableitung des Sprungvektors $\Delta d G$ längs Σ an der Stelle $\bar{x}$ verschwindet. Wir fassen also zusammen:

Auch die 2-Loop-Näherung zur eichinvarianten freien Energiedichte $G(\bar{\sigma}, e^2, \hbar)$ liefert keinen Nachweis für einen Phasenübergang 1. Ordnung.

Es läßt sich nun sehr leicht die asymptotische Gestalt der Phasentrennfläche bestimmen, wie sie sich aus dem Nullraum von $\Delta \partial_\mu \partial_\nu G(\bar{x})$ ergibt. Mit Hilfe des Ansatzes für die Tangentenvektoren $v_1 = \partial/\partial e^2 + (2\bar{\sigma}_c/\partial e^2) \partial/\partial \bar{\sigma}$
 $v_2 = \partial/\partial \hbar + (2\bar{\sigma}_c/\partial \hbar) \partial/\partial \bar{\sigma}$ folgt für alle $\lambda > 0$:

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_c}{\partial e^2}(e^2, \hbar=0) = 0, \quad \frac{\partial \bar{\sigma}_c}{\partial \hbar}(e^2, \hbar=0) = c$$

Unter Beachtung der Identität (4.20) ergibt sich für $\hbar = 1$ im Limes $e^2 \rightarrow 0$, $\lambda \rightarrow 0$, $\lambda/e^2 > 0$ in $d = 4$ die asymptotische Form

$$\bar{\sigma}_c(e^2, \lambda) = (4\lambda + 3e^2) \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{\Delta}(k)^{-1} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \quad (4.32)$$

Ergänzend möchte ich hier erwähnen, daß sich auch unter der Annahme divergierender Korrelationslängen auf $\bar{\sigma}_c$ die asymptotische Form (4.32) ergibt. Für den Higgs-propagator in Landau-Eichung ist dies im Prinzip wohlbekannt ((4.32) ist gerade die Gitterversion des 1-Loop Massen-Counterterms einer bei Masse Null renormierten Theorie [Coleman, Weinberg 1973; Jackiw 1974]). Mit anderen Worten, durch störungstheoretische Auflösung der Bedingung $v_{\text{eff}}''(\phi_c = \langle \phi \rangle) = 0$ erhält man in Landau-Eichung in niedrigster Ordnung ebenfalls die Gleichung (4.32), und zwar unabhängig davon, ob man sich der Phasentrennfläche aus der Coulomb- oder aus der Higgsphase nähert (im letzteren Fall ist zu beachten,

daß dann auch der Wert des Minimums $\phi_c = \langle \phi \rangle$ nach $\hbar$ zu entwickeln ist). Weiter erhält man (4.32) auch, indem man verlangt, daß für $\sigma \downarrow \sigma_c$ der transversale Anteil des inversen Photonpropagators bei Impuls Null verschwindet^(*). Zu guter Letzt kann man sich auch sofort davon überzeugen, daß die Bedingung $|\langle \phi \rangle_{\text{Landau}}|^2 = 0$ für $\sigma \downarrow \sigma_c$ ebenfalls auf (4.32) führt.

All diese störungstheoretischen Indizien verdichten sich also zu dem konsistenten Bild, daß für kleine e^2 und λ und $e^2 \sim \lambda$ auf der Phasentrennfläche $\sigma_c(e^2, \lambda)$ keine Sprünge in den 1. Ableitungen der freien Energiedichte $G(\sigma, e^2, \lambda)$ auftreten, daß die Sprünge in den 2. Ableitungen verallgemeinerten Ehrenfestgleichungen genügen, daß die Korrelationslängen der Higgs- und Photonfelder divergieren bzw. die entsprechenden Massen stetig gegen Null gehen und schließlich auch der Higgserwartungswert stetig verschwindet. Insgesamt erhalten wir also eine, wie ich meine, überwältigende Argumentation für einen Phasenübergang 2. Ordnung in diesem Parameterbereich.

(*) F. Nill, E. Seiler, private Diskussion

4.4 Phasenübergang 1. Ordnung für $\lambda \sim e^4$

Sieht man sich die Arbeit von [Coleman-Weinberg 1973] sowie sämtliche darauf aufbauenden Diskussionen in der Literatur genauer an, so stellt man fest, daß die Argumentation für einen Phasenübergang 1. Ordnung an entscheidender Stelle immer auf der ad hoc Annahme beruht, daß λ von der Ordnung e^4 ist. Will man diese Annahme störungstheoretisch implementieren, so sollte man es konsistenter Weise eigentlich von Beginn an tun, d.h. man sollte nicht nach $\hbar$, sondern nach e^2 entwickeln und dabei $\lambda = \hat{\lambda} e^4$ setzen.

Der Sinn dieses Paragraphen ist es zu zeigen, daß wir in diesem Limes tatsächlich Sprünge in den 1. Ableitungen der freien Energiedichte erhalten und somit auf einen Phasenübergang 1. Ordnung schließen dürfen. Ich werde dann auch das effektive Potential in Landau-Eichung in diesem Limes berechnen und zeigen, daß es sich gerade als konvexe Hülle des Coleman-Weinberg Potentials ergibt. Hieraus läßt sich eine qualitativ neue Gleichung für die Phasentrennfläche σ_c im asymptotischen Bereich $\lambda \sim e^4$ herleiten, auf der auch die Clausius-Clapeyron Gleichungen für einen Phasenübergang 1. Ordnung erfüllt sind. Die Schnittlinie dieser Fläche mit der im vorherigen Abschnitt hergeleiteten liefert daher zum ersten Mal eine, wenn auch ledigliche störungstheoretische Voraussage für die Existenz einer sog. trikritischen Linie in diesem Modell, auf der der Phasenübergang 2. Ordnung in einen solchen 1. Ordnung übergeht. Monte-Carlo Daten für U(1)- und SU(2)-Higgsmodelle lassen dies in der Tat seit längerem als eine realistische Möglichkeit erscheinen.

Um die neue asymptotische Entwicklung herzuleiten, ist es, wie wir sehen werden, nicht ausreichend $\lambda = \hat{\lambda} e^4$ zu setzen, sondern wir müssen zusätzlich $\sigma = \hat{\sigma} e^2$ verlangen. Im Limes $e^2 \rightarrow 0$ verbleiben dann als uns noch zur Verfügung stehende Parameter $\hat{\lambda}$ und $\hat{\sigma}$, und der Phasenübergang findet auf einer Linie $\hat{\sigma}_c(\hat{\lambda})$ in diesem Parameterraum statt. Wir werden daher für die Phasentrennfläche σ_c eine asymptotische Gleichung der Gestalt

$$\sigma_c(e^2, \hat{\lambda} e^4) = \hat{\sigma}_c(\hat{\lambda}) e^2 \quad (4.33)$$

erhalten. Zu diesem Zweck drücke ich zunächst die Wirkung durch Umskalierung des Higgsfelds $\hat{\Phi} = e \Phi$ mit Hilfe der neuen Parameter aus:

$$\hat{S}(\mathcal{H}, \hat{\Phi}) = \frac{1}{2e^2} (\|\mathcal{H}\|^2 + \|\mathcal{H} \hat{\Phi}\|^2) + \sum_x \hat{V}(\hat{\Phi}(x)) \quad (4.34)$$

mit

$$\hat{V}(\hat{\Phi}) = \frac{\lambda}{4} |\hat{\Phi}|^4 - \frac{g}{2} |\hat{\Phi}|^2$$

Um zu entscheiden, wie nun der Limes $e^2 \rightarrow 0$ des Funktionalintegrals auszusehen hat, denken wir uns das A-Integral zuerst ausgeführt und definieren

$$e^{-\hat{S}_{eff}(\hat{\Phi}, e^2)} = \int d\mu(\mathcal{H}) e^{-\frac{1}{2e^2} \sum_{\langle xy \rangle} |\hat{\Phi}_x - e^{ie\mathcal{H}_{xy}} \hat{\Phi}_y|^2} \quad (4.35)$$

wobei $d\mu(A)$ das Gauß'sche Maß mit Kovarianz $d^* \Delta^{-2} d$ ist (d.h. ich rechne von jetzt ab in Landau-Eichung) und $A \rightarrow e A$ umskaliert wurde. Für das verbleibende $\hat{\Phi}$ -Integral

$$\int \mathcal{D}\hat{\Phi} e^{-\hat{S}_{eff}(\hat{\Phi}, e^2)} = \sum_x \hat{V}(\hat{\Phi}(x)) \quad (4.36)$$

ist nun zu beachten, daß der Gewichtungsfaktor $e^{-S_{eff}}$ im Limes $e^2 \rightarrow 0$ Beiträge von nicht-konstanten Konfigurationen $x \rightarrow \hat{\Phi}(x)$ exponentiell unterdrückt.

(Da dieses Kapitel nicht zum Ziel hat, die asymptotische Gültigkeit störungstheoretischer Ergebnisse streng zu beweisen, erlaube ich mir hier, die Verifikation dieser Behauptung dem kritischen Leser zu überlassen). Es ist daher sinnvoll, $\hat{S}_{eff}(\hat{\Phi}, e^2)$ um eine zunächst beliebige, aber festgehaltene, konstante Konfiguration $\hat{\Phi}(x) = \hat{\Phi}_0$ zu entwickeln, indem wir eine neue Integrationsvariable ψ gemäß $\hat{\Phi}(x) = \hat{\Phi}_0 + e \psi(x)$ einführen. Nach den üblichen Feynman-Regeln erhalten wir dann für (4.35) :

$$\begin{aligned} & \hat{S}_{eff}(\hat{\Phi}_0 + e\psi, e^2) \\ &= \frac{1}{2} \|\mathcal{H}\psi\|^2 + \frac{d-1}{2} \log \det(1 + \frac{|\hat{\Phi}_0|^2}{\Delta}) + W_{eff}(e\psi, \hat{\Phi}_0, e^2) \end{aligned} \quad (4.37)$$

wobei W_{eff} in niedrigster Ordnung linear in $e\psi$ ist und sich als Summe über $n \geq 1$ aller zusammenhängenden n-loop Vakuum-Graphen einer massiven Vektorfeldtheorie mit Kovarianz $C_A = d^* \Delta^{-1} d (\Delta + |\hat{\Phi}_0|^2)^{-1}$ und Wechselwirkung

$$\begin{aligned} & \mathcal{I}(\mathcal{H}; e\psi, \hat{\Phi}_0, e^2) \\ &= \frac{1}{2e^2} \|\mathcal{H}(\hat{\Phi}_0 + e\psi)\|^2 - \frac{1}{2} \|\mathcal{H}\psi\|^2 - \frac{|\hat{\Phi}_0|^2}{2} \|\mathcal{H}\|^2 \end{aligned} \quad (4.38)$$

ergibt. Nun entwickeln wir noch das Higgspotential gemäß

$$\hat{V}(\hat{\phi}) = \hat{V}(\hat{\phi}_0) + \sum_{\nu \geq 1} \frac{(e\psi)^\nu}{\nu!} \hat{V}^{(\nu)}(\hat{\phi}_0)$$

und setzen alles in (4.36) ein. Jedoch bevor wir jetzt stur nach Schema F (F = Feynmanregeln) das Funktionalintegral (4.36) weiterentwickeln, müssen wir uns über die korrekte Wahl von $\hat{\phi}_0$ Gedanken machen. Sie muß klarerweise so getroffen sein, daß im Limes $e^2 = 0$ für $\hat{\phi}(x) = \hat{\phi}_0$ die Wirkung in (4.36) minimiert wird. Mit anderen Worten, es darf nach Einsetzen von (4.37) und (4.39) im Exponenten von (4.36) kein Term linear in $e\psi$ auftreten. Wie man leicht sieht, ist dies im unendlichen Volumen genau dann der Fall, wenn $\hat{\phi}_0$ das "Coleman-Weinberg Potential"

$$V_{CW}(\hat{\phi}) := \hat{V}(\hat{\phi}) + \frac{d-1}{2} \int \log\left(1 + \frac{|\hat{\phi}|^2}{\Delta(k)}\right) \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \quad (4.39)$$

minimiert ($V_{CW}(\hat{\phi})$ ist nichts anderes als die Gitterversion des unrenormierten effektiven Potentials^(*) von [Coleman, Weinberg 1979; Linde 1976]). In der Tat gilt dann an der Stelle $\hat{\phi}_0$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \phi_a}(\hat{\phi}_0) &= -(\alpha-1) \hat{\phi}_0^\alpha \int (\tilde{\Delta} + |\hat{\phi}_0|^2)^{-1} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \\ &= -\hat{\phi}_0^\alpha \sum_{\mu=1}^d \langle H_{x,x+\hat{\mu}}^2 \rangle_{CH} \\ &= -\frac{\partial W_{eff}}{\partial \psi_a(x)}(\psi=0, \hat{\phi}_0, e^2=0) \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung folgt hierbei sofort durch Entwickeln der Wechselwirkung I in (4.38) :

$$I(H; e\psi, \hat{\phi}_0, e^2) = e \hat{\phi}_0^\alpha \sum_{\langle xy \rangle} (H_{xy}^2 \psi_y^\alpha) + e \sum_{\langle xy \rangle} H_{xy} \operatorname{Im}(\bar{\psi}_x \psi_y) + \mathcal{O}(e^2)$$

Insgesamt erhalten wir also in 0-ter Ordnung für die freie Energiedichte das folgende Ergebnis^(**):

$$\hat{G}^{(0)}(\hat{\epsilon}, \hat{\lambda}) \equiv \lim_{e^2 \downarrow 0} G(e^2, \hat{\epsilon} e^2, \hat{\lambda} e^4) = - \inf_{\hat{\phi}} V_{CW}(\hat{\phi}) \quad (4.40)$$

(*) Genaugenommen hatten Coleman und Weinberg die renormierte Kopplung $\hat{e}_R = 0$ gesetzt. Die Verallgemeinerung auf $\hat{e}_R \neq 0$ wurde erstmals von Linde durchgeführt.

(**) Nach Abzug der irrelevanten Normierung $\log \int D\psi e^{-\frac{1}{2} \|\psi\|^2} = \log(\det \Delta)$

Hiermit wird es offensichtlich, daß wir einen Phasenübergang 1. Ordnung erhalten werden, falls das Minimum von V_{CW} als Funktion von $\hat{\epsilon}$ und $\hat{\lambda}$ Sprünge aufweist. Bevor ich dies jedoch genauer analysiere, möchte ich auf den Zusammenhang mit dem effektiven Potential nach der Definition (4.7) hinweisen. Zunächst beachte man, daß ausgehend von (4.34) nirgendwo die Eichinvarianz von $\hat{V}(\hat{\phi})$ benutzt wurde. Wir dürfen also in (4.34) das Higgsfeld $\hat{\phi}$ auch an einen äußeren Strom $\hat{j}$ koppeln und müssen dann in allen weiteren Überlegungen lediglich $\hat{V}(\hat{\phi})$ ersetzen durch $\hat{V}(\hat{\phi}, \hat{j}) := \hat{V}(\hat{\phi}) - \hat{j} \hat{\phi}$. Anstelle von (4.40) erhalten wir dann

$$\hat{G}^{(0)}(\hat{\epsilon}, \hat{\lambda}, \hat{j}) = \sup_{\hat{\phi}} [\hat{j} \hat{\phi} - V_{CW}(\hat{\phi})] \quad (4.41)$$

Als Funktion von $\hat{j}$ ist $\hat{G}^{(0)}$ also nichts anderes als die Konvex-Konjugierte von $V_{CW}(\hat{\phi})$. Umgekehrt folgt hieraus sofort, daß in 0-ter Ordnung unserer neuen Entwicklung das effektive Potential $\hat{V}_{eff}^{(0)}(\hat{\phi})$ als Konvex-Konjugierte von $\hat{G}^{(0)}$ in Landau-Eichung gerade durch die konvexe Hülle $\overline{V}_{CW}(\hat{\phi})$ gegeben ist:

$$\begin{aligned} \hat{V}_{eff}^{(0)}(\hat{\phi}, \hat{\epsilon}, \hat{\lambda}) &\equiv \lim_{e^2 \rightarrow 0} V_{eff}(e^{-1}\hat{\phi}, \hat{\epsilon}e^2, \hat{\lambda}e^4, e^2) \\ &= \overline{V}_{CW}(\hat{\phi}) \end{aligned} \quad (4.42)$$

Dieses Ergebnis ist insofern befriedigend, als es nun eine korrekte Interpretation der Standardliteratur erlaubt, ohne der elementaren Tatsache zu widersprechen, daß $\hat{V}_{eff}^{(0)}$ als Limes einer konvexen Funktion selbst konvex sein muß.

Zur Bestimmung der Phasenstruktur wende ich mich nun einer Kurvendiskussion von $V_{CW}(\hat{\phi})$ zu. Zunächst ist es sinnvoll, die Variable $t = |\hat{\phi}|^2$ einzuführen und statt $V_{CW}(\hat{\phi})$ die Funktion ^(*)

$$p(t) = \frac{\hat{\lambda}}{2} t^2 - \hat{\epsilon} t + (\alpha - 1) \int \ln(1 + \frac{t}{\tilde{\Delta}})$$

zu betrachten. Es gilt $p(|\hat{\phi}|^2) = 2 V_{CW}(\hat{\phi})$. Ein lokales Minimum von V_{CW} bei $\hat{\phi} = 0$ liegt genau dann vor, wenn $p'(t = 0) > 0$, d.h. wenn

$$\hat{\epsilon} < (\alpha - 1) \int \tilde{\Delta}(k)^{-1} \quad (4.43)$$

Ein zweites lokales Minimum bei $|\hat{\phi}|^2 = t_0 > 0$ ist äquivalent zu $p'(t_0) = 0$, $p''(t_0) > 0$, d.h.

$$\hat{\epsilon} = \hat{\lambda} t_0 + (\alpha - 1) \int (\tilde{\Delta} + t_0)^{-1} \quad (4.44a)$$

$$\hat{\lambda} > (\alpha - 1) \int (\tilde{\Delta} + t_0)^{-2} \quad (4.44b)$$

(*) Wie zuvor lasse ich von jetzt ab das Integrationsmaß im Impulsraum wieder weg

Wir sehen sofort, daß für $\hat{\lambda} < \infty$ dieses Minimum nicht in den Ursprung wandern kann, d.h. es gibt keinen stetigen Phasenübergang. Die Phasentrennlinie $\hat{\epsilon}_c(\hat{\lambda})$ wird nun definiert durch die Bedingung $p(t_0 = t_c) = p(0)$, d.h.

$$p(t_c) \equiv -\frac{\hat{\lambda}}{2} t_c^2 - t_c(d-1) \int (\tilde{\Delta} + t_c)^{-1} + (d-1) \int \ln(1 + \frac{t_c}{\tilde{\Delta}}) \stackrel{!}{=} 0 \quad (4.45)$$

wobei ich (4.44a) verwendet habe. Aus (4.45) erhält man $\hat{\lambda}$ als Funktion von t_c und man erkennt sofort, daß für $\hat{\lambda} > \hat{\lambda}(t_c)$ das Minimum bei $|\hat{\Phi}|^2 = t_c$ tiefer liegt und für $\hat{\lambda} < \hat{\lambda}(t_c)$ das Minimum bei $|\hat{\Phi}|^2 = 0$. Außerdem lassen sich auch die Konsistenzbedingung (4.43) und (4.44b) relativ leicht verifizieren, was ich mir hier jedoch ersparen möchte. Wenn wir die Lösung $\hat{\lambda}(t_c)$ in (4.44a) einsetzen, erhalten wir schließlich folgende parametrische Gleichung für die Phasentrennlinie:

$$\begin{aligned} \hat{\lambda} &= x_2(t_c) := \frac{2(d-1)}{t_c^2} \int \left[\ln(1 + \frac{t_c}{\tilde{\Delta}}) - \frac{t_c}{\tilde{\Delta} + t_c} \right] \\ \hat{\epsilon} &= x_c(t_c) := \frac{d-1}{t_c} \int \left[2 \ln(1 + \frac{t_c}{\tilde{\Delta}}) - \frac{t_c}{\tilde{\Delta} + t_c} \right] \end{aligned} \quad (4.46)$$

Als nächstes zeige ich, daß die Sprünge in den Ableitungen $\partial \hat{G}^{(0)} / \partial \hat{\epsilon}$ und $\partial \hat{G}^{(0)} / \partial \hat{\lambda}$ auf dieser Phasentrennlinie einer Clausius-Clapeyron Gleichung genügen: Falls das Minimum bei $\hat{\Phi} = 0$ angenommen wird, so gilt $\hat{G}^{(0)} = 0$ und daher $\partial \hat{G}^{(0)} / \partial \hat{\epsilon} = \partial \hat{G}^{(0)} / \partial \hat{\lambda} = 0$. Andernfalls gilt

$$\hat{G}^{(0)}(\hat{\epsilon}, \hat{\lambda}) = \frac{1}{2} p(t_0(\hat{\epsilon}, \hat{\lambda}), \hat{\epsilon}, \hat{\lambda})$$

wobei $t_0(\hat{\epsilon}, \hat{\lambda})$ durch (4.44a), d.h. $p'(t_0) = 0$, gegeben ist. Wir erhalten also

$$\frac{\partial \hat{G}^{(0)}}{\partial \hat{\epsilon}} = -\frac{t_0}{2}, \quad \frac{\partial \hat{G}^{(0)}}{\partial \hat{\lambda}} = \frac{t_0^2}{4}$$

Die Clausius-Clapeyron Gleichung könne wir daher in der folgenden Form schreiben

$$\frac{t_c}{4} \dot{x}_2(t_c) - \frac{t_c}{2} \dot{x}_c(t_c) = 0$$

und es ist trivial nachzuprüfen, daß dies mit (4.46) tatsächlich erfüllt ist.

Bemerkung:

Rein prinzipiell hätte man auch nach dem Schema von § 4.2 vorgehen und die Phasentrennlinie (4.46) durch Aufintegration der obigen Gleichung gewinnen können, wobei die Integrationskonstante durch $p(t_c) = 0$ festgelegt wäre.

Praktisch ist dies jedoch nicht möglich, da mit (4.44a) $t_0(\hat{\epsilon}, \hat{\lambda})$ nicht explizit aufgelöst werden kann. Die beiden Verfahrensweisen sind jedoch offensichtlich äquivalent und insbesondere, da nur das Minimum von V_{CW} als Funktion von $\hat{\epsilon}$ und $\hat{\lambda}$ benutzt wird, auch eichinvariant.

Schließlich will ich mich der trikritischen Linie zuwenden^(*). Sie ergibt sich als Schnittkurve der beiden asymptotischen Gestalten (4.32/33) der Phasentrennfläche. Nach (4.32) ist im Limes $e^2 \rightarrow 0$ der Phasenübergang für $\lambda = \tilde{\lambda} e^2$ unabhängig von $\tilde{\lambda}$ immer von 2. Ordnung, während er für $\lambda = \hat{\lambda} e^4$ nach (4.33) und (4.46) unabhängig von $\hat{\lambda} < \infty$ immer von 1. Ordnung ist (es werden alle Werte $\hat{\lambda}$ in (4.46) angenommen). Es ist daher vernünftig, für die trikritische Linie den Ansatz

$$\lambda_{tc}(e^2) = \hat{\lambda}(e^2) e^4$$

zu machen, wobei wir $\lim_{e^2 \rightarrow 0} \hat{\lambda}(e^2) = \infty$ und $\lim_{e^2 \rightarrow 0} e^2 \hat{\lambda}(e^2) = 0$ erwarten sollten.

Wiewohl man sich natürlich im klaren sein sollte, daß dies im Grenzbereich der Gültigkeit beider Entwicklungen liegt, will ich diesen Ansatz sowohl in (4.32) als auch in (4.33) einsetzen:

$$\begin{aligned} \epsilon_1(e^2, \hat{\lambda}(e^2) e^4) &= \hat{\epsilon}_c(\hat{\lambda}(e^2)) e^2 \\ \epsilon_2(e^2, \hat{\lambda}(e^2) e^4) &= \alpha e^2 + b \hat{\lambda}(e^2) e^4 \end{aligned} \quad (4.47)$$

Hierbei bezieht sich der Index $i = 1, 2$ auf den Phasenübergang i -ter Ordnung, und es gilt

$$\alpha = (d-1) \int \tilde{\Delta}(k)^{-1}, \quad b = 4 \int \tilde{\Delta}(k)^{-1}$$

Indem wir $\epsilon_1 = \epsilon_2$ setzen und durch e^2 dividieren erhalten wir als Konsistenzbedingung

$$\lim_{e^2 \downarrow 0} \hat{\epsilon}_c(\hat{\lambda}(e^2)) = a + b \lim_{e^2 \downarrow 0} e^2 \hat{\lambda}(e^2)$$

was sich nach den obigen Annahmen zu

(*) Der Name "rechtfertigt" sich durch Einführen des unphysikalischen äußeren Stroms J . Aus der Gestalt von $\hat{G}(\hat{J}, \hat{\epsilon}, \hat{\lambda})$ (bzw. natürlich $V_{CW}(\hat{\Phi}, \hat{\epsilon}, \hat{\lambda})$) erkennt man, daß dann auf der Triple-Linie tatsächlich 3 Phasen identisch werden, ähnlich wie in metamagnetischen Spinmodellen (siehe z.B. [Kincaid, Cohen 1975]).

$$\lim_{\hat{\lambda} \rightarrow \infty} \hat{\epsilon}_c(\hat{\lambda}) = \alpha \equiv (d-1) \int \tilde{\Delta}(k)^{-1}$$

reduziert. Nach (4.46) ist $\hat{\lambda} \rightarrow \infty$ äquivalent zu $t_c \rightarrow 0$ und mit Hilfe der Regeln von l'Hospital zeigt man sofort, daß in der Tat

$$\lim_{t_c \downarrow 0} x_{\epsilon}(t_c) = (d-1) \int \tilde{\Delta}^{-1}(k)$$

Dies scheint mir ein nicht-trivialer Konsistenzpunkt zu sein, der das Vertrauen in unsere Rechnung stärken sollte, da es à-priori in keinster Weise klar ist, warum gerade $\hat{\epsilon}(\hat{\lambda} = \infty) = \alpha$ gelten sollte.

Als nächstes wollen wir eine invertierbare Reparametrisierung $e^2 \rightarrow t_c(e^2)$ benutzen, so daß $\hat{\lambda}(e^2) = x_2(t_c(e^2))$ und $\hat{\epsilon}(\hat{\lambda}(e^2)) = x_{\epsilon}(t_c(e^2))$. Dies ist möglich, da sowohl x_2 als auch x_{ϵ} in der Nähe von $t_c = 0$ invertierbar sind (die Ableitungen sind $\neq 0$). Offensichtlich muß hierbei $t_c(e^2 = 0) = 0$ gelten. Aus der Forderung $\hat{\epsilon}_1 = \hat{\epsilon}_2$ erhalten wir die Umkehrfunktion $e^2(t_c)$:

$$e^2(t_c) = \frac{x_{\epsilon}(t_c) - \alpha}{b x_2(t_c)} \quad (4.48)$$

Nun sind wir in der Lage zu zeigen, daß (in $d = 4$) $\hat{\lambda}(e^2)$ für $e^2 \rightarrow 0$ logarithmisch divergiert:

$$\begin{aligned} \lim_{e^2 \downarrow 0} \frac{\hat{\lambda}(e^2)}{\log e^2} &= \lim_{t_c \downarrow 0} \frac{x_2(t_c)}{\log e^2(t_c)} \\ &= \lim_{t_c \downarrow 0} \frac{x_2(t_c)}{\log t_c} \lim_{t_c \downarrow 0} \frac{\log t_c}{\log e^2(t_c)} \end{aligned}$$

Lemma 4.1: In $d = 4$ gilt:

$$\text{i)} \quad \lim_{t_c \downarrow 0} \frac{x_2(t_c)}{\log t_c} = -\frac{3}{16\pi^2}$$

$$\text{ii)} \quad \lim_{t_c \downarrow 0} \frac{\log t_c}{\log e^2(t_c)} = 1$$

Mit Hilfe von Lemma 4.1 erhalten wir also insgesamt

$$\lambda_{t_0}(e^2) \approx -\frac{3}{16\pi^2} e^4 \log \frac{e^2}{e_0^2} \quad (4.49)$$

wobei sich e_0^2 theoretisch aus (4.48) und (4.46) bestimmen läßt.

Beweis von Lemma 4.1.: Man verwende die Regeln von l'Hospital:

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad \lim_{t \downarrow 0} \frac{x_2(t)}{\log t} &= \lim_{t \downarrow 0} t \dot{x}_2(t) \\ &= \lim_{t \downarrow 0} \frac{6}{t^2} \int [-2 \ln(1 + \frac{t}{\tilde{\Delta}}) + \frac{t(2\tilde{\Delta} + 3t)}{(\tilde{\Delta} + t)^2}] \\ &= \lim_{t \downarrow 0} 3 \int [\frac{2+6}{(\tilde{\Delta} + t)^2} - 8 \frac{\tilde{\Delta} + 3t}{(\tilde{\Delta} + t)^3} + 6t \frac{2\tilde{\Delta} + 3t}{(\tilde{\Delta} + t)^4}] \\ &= \lim_{t \downarrow 0} 3 \int \frac{6t^2}{(\tilde{\Delta} + t)^4} - \frac{4t}{(\tilde{\Delta} + t)^3} \\ &= \lim_{t \downarrow 0} -6t \int (\tilde{\Delta} + t)^{-3} \end{aligned}$$

Statt $t \rightarrow 0^+$ können wir im letzten Integral auch den Kontinuums-
limes durchführen. In der Tat, durch Einführen der Gitterkonstante ε erhalten wir

$$\int_{-\frac{\pi}{\varepsilon}}^{\frac{\pi}{\varepsilon}} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{t}{(\varepsilon^{-2} \tilde{\Delta}(\varepsilon p) + t)^3} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\varepsilon^2 t}{(\tilde{\Delta}(k) + \varepsilon^2 t)^3}$$

und der Limes $t \rightarrow 0$ ist daher äquivalent zum Limes $\varepsilon \rightarrow 0$. Der Kontinuums-
limes liefert uns (*)

$$\frac{t}{8\pi^2} \int_0^\infty dp \frac{p^3}{(p^2 + t)^3} = \frac{1}{32\pi^2}$$

(*) Man benütze das Theorem von der dominierten Konvergenz

$$\begin{aligned}
 \text{ii) } \lim_{t \downarrow 0} \frac{\log t}{\log e^2(t)} &= \lim_{t \downarrow 0} \frac{e^2(t)}{t \frac{d}{dt} e^2(t)} \\
 &= \lim_{t \downarrow 0} \left[\frac{t \dot{x}_6(t)}{x_6(t) - a} - \frac{t \dot{x}_2(t)}{x_2(t)} \right]^{-1} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung folgt wegen $\lim_{t \downarrow 0} x_2(t) = \infty$, $\lim_{t \downarrow 0} t \dot{x}_2(t) = -3/16\pi^2$ (siehe i) sowie

$$\begin{aligned}
 \lim_{t \downarrow 0} \dot{x}_6(t) &= \lim_{t \downarrow 0} \frac{x_6(t) - a}{t} \\
 &= -3 \lim_{t \downarrow 0} \int \frac{t}{(\lambda + t)^3} = -\frac{3}{32\pi^2}
 \end{aligned}$$

was sich abermals durch Anwendung der l'Hospital'schen Regeln leicht herleiten läßt. 

Als letztes will ich zeigen, daß man in dieser niedrigsten Ordnung ohne Schwierigkeiten den Kontinuumslikes ziehen kann, und daß das Ergebnis in Übereinstimmung mit der Standardliteratur steht. Wie üblich besteht der Trick darin, die "nackten" Konstanten $\hat{G}$ und $\hat{\lambda}$ gegen geeignete "physikalische" Konstanten einzutauschen. Diese hält man dann - sozusagen als von der Natur vorgegeben - fest, und führt den Limes Gitterkonstante gegen Null durch. Ähnlich wie in [Linde 1976] wähle ich hier das nicht-triviale Minimum $t_0(\hat{G}, \hat{\lambda})$ nach (4.44a) als einen der neuen Parameter. In der Higgsphase würde man ihn mit der Photonmasse m_A^2 identifizieren, wie ein Blick auf die Vektorkovarianz C_A zeigt. Als zweite Variable bietet sich $V_{CW}''(|\hat{\Phi}|^2 = t_0)$ an, was man in unserer Skalierung gemäß der üblichen Sprechweise als die durch e^2 dividierte "Higssmasse" $m_\Phi^2 \equiv m_H^2 / e^2$ bezeichnen würde. Ich werde diese Notation etwas schlampig auch dann beibehalten wenn das Minimum bei $\hat{\Phi} = 0$ tiefer liegt. Es gilt in $d = 4$:

$$\begin{aligned}
 \hat{\lambda} &= \frac{m_\Phi^2}{2m_H^2} + 3 \int (\Delta + m_H^2)^{-2} \\
 \hat{G} &= \hat{\lambda} m_H^2 + 3 \int (\Delta + m_H^2)^{-1}
 \end{aligned}$$

Hiermit läßt sich die Ableitung $p'(t)$ im Kontinuumslimites berechnen:

$$p'(t) = \frac{m_\phi^2}{2m_H^2} t - \frac{m_\phi^2}{2} + \frac{3}{8\pi^2} \int_0^\infty p^3 dp \left[\frac{t - m_H^2}{(p^2 + m_H^2)^2} + \frac{1}{p^2 + t} + \frac{1}{p^2 + m_H^2} \right]$$

Wir schreiben den Integranden in der Form

$$2p^3 \int_{m_H^2}^t \frac{t-s}{(p^2+s)^3} ds$$

und führen das $-$ Integral zuerst aus. Dies ergibt (*)

$$p'(t) = \frac{m_\phi^2}{2m_H^2} t - \frac{m_\phi^2}{2} + \frac{3}{16\pi^2} \int_{m_H^2}^t \frac{t-s}{s} ds$$

Aus der Bedingung $p(0) = 0$ gewinnen wir $p(t)$ und gemäß $V_{CW}(\hat{\phi}) = \frac{1}{2} p(t = |\hat{\phi}|^2)$ schließlich

$$V_{CW}(\hat{\phi}) = \frac{\hat{\lambda}_R}{4} |\hat{\phi}|^4 - \frac{\hat{G}_R}{2} |\hat{\phi}|^2 + \frac{3}{64\pi^2} |\hat{\phi}|^4 \ln \frac{|\hat{\phi}|^2}{m_H^2} \quad (4.50)$$

mit

$$\hat{\lambda}_R = \frac{m_\phi^2}{2m_H^2} - \frac{g}{32\pi^2}, \quad \hat{G}_R = \frac{m_\phi^2}{2} - \frac{3}{16\pi^2} m_H^2$$

Wenn wir nun wieder $\hat{\phi} = e\phi$, $\lambda_R = \hat{\lambda}_R e^4$ und $G_R = \hat{G}_R e^2$ setzen, stimmt dieses Ergebnis exakt mit dem von [Linde 1976] überein. Aus der Bedingung $V_{CW}(|\hat{\phi}|^2 = m_A^2) \leq 0$ erhält man hiermit auch die wohlbekannte untere Schranke für das Verhältnis m_ϕ^2 / m_A^2 :

(*) Genaugenommen sollte man den Kontinuumslimites von

$2 \int_{m_H^2}^t ds (t-s) \int (\tilde{\Delta} + s)^{-3}$ berechnen, was jedoch mit Hilfe des dominierten Konvergenztheorems auf obigen Ausdruck führt.

$$\frac{m_\phi^2}{m_H^2} \geq \frac{3}{16\pi^2} \quad \text{bzw.} \quad \frac{m_H^2}{m_A^2} \geq \frac{3e^2}{16\pi^2} \quad (4.51)$$

Abschließend möchte ich betonen, daß es mehr als nur reine Pedanterie ist, eine störungstheoretische Entwicklung im asymptotischen Bereich $\lambda \sim e^4$ nach der hier vorgeschlagenen Methode durchzuführen. Zwar könnte man bei oberflächlicher Betrachtung vorschlagen, einfach in der gewöhnlichen Loop-Entwicklung λ durch $\hat{\lambda} e^4$ und $\hat{\sigma}$ durch $\hat{\sigma} e^2$ zu ersetzen und für $\hbar = 1$ nach Potenzen von e^2 umzusortieren. In der Coulombphase wäre dies vielleicht auch durchführbar aber in der Higgsphase müßte man dann in jeder Ordnung von e^2 Beiträge von beliebig hoher Ordnung in $\hbar$ aufsummieren. Beispielsweise wären alle Graphen von der Gestalt



mit n "Photonschleifen" proportional zu $(e^2 R_0)^{2n} (2\hat{\sigma})^{-n} = (2\hat{\lambda})^{-n}$ und daher von nullter Ordnung in e^2 (man beachte, daß der transversale Photonpropagator gleich $(\Delta + e^2 R_0^2)^{-1} = (\Delta + \hat{\sigma}/\hat{\lambda})^{-1}$, also ebenfalls von nullter Ordnung in e^2 ist). Diese Graphen tragen nicht nur zur freien Energiedichte $G(e^2, \hat{\sigma}e^2, \hat{\lambda}e^4)$, sondern als Teilgraphen (etwa durch Aufschneiden einer Photonschleife) auch zu zusammenhängenden n -Punkt-Funktionen bei und müssen daher z.B. für die Berechnung der Photonmasse berücksichtigt werden. (Man beachte, daß die Photonmasse in der nullten Ordnung der neuen Asymptotik tatsächlich nicht durch $e^2 R_0^2$ sondern durch $m_A^2 = t_0(\hat{\sigma}, \hat{\lambda})$ gegeben ist, also durch das Minimum von $V_{CW}(\hat{\Phi})$). Die hier vorgeschlagene Störungsentwicklung würde also die Resummation all dieser Terme automatisch für uns erledigen. Spekulationen, warum man hierbei eventuell mit neuartigen Ergebnissen insbesondere im Hinblick auf einen Kontinuumslimit rechnen könnte, werde ich im nun folgenden letzten Paragraphen skizzieren.

4.5. Zusammenfassung und Ausblicke zum Coleman-Weinberg Mechanismus

Nach einer kritischen Diskussion zum effektiven Potential und dessen Eigenschaften, insbesondere im Rahmen einer Loop-Entwicklung, habe ich in diesem Kapitel die Anwendung verallgemeinerter Clausius-Clapeyron und Ehrenfest Gleichungen als eichinvarianten Bestimmungstest für die Ordnung des Coulomb-Higgs Phasenübergangs vorgeschlagen. Das Ergebnis war, daß sich im asymptotischen Bereich $e^2 \rightarrow 0$ und $\lambda \rightarrow 0$ für jedes fest vorgegebene Verhältnis $\lambda/e^2 > 0$ kein Anzeichen für einen Phasenübergang 1. Ordnung ergibt. Vielmehr deuten alle Anzeichen in diesem Bereich konsistent auf die Existenz eines Übergangs 2. Ordnung auf der Fläche $\zeta_c(e^2, \lambda)$.

Im letzten Abschnitt wurde dann die in der gängigen Literatur überall stillschweigend getroffene Annahme $\lambda \sim e^4$ ernsthaft aufgegriffen. Durch konsequente Implementierung des Ansatzes $\lambda = \hat{\lambda} e^4$, $\zeta = \hat{\zeta} e^2$ wurde eine neue Störungsentwicklung nach e^2 in diesem Parameterbereich skizziert und in nullter Ordnung durchgeführt. Das Ergebnis war, daß sich die freie Energiedichte in Landau-Eichung $\hat{G}^{(0)}(\hat{J}, \hat{\zeta}, \hat{\lambda})$ in diesem Limes tatsächlich als konvex-konjugierte des Coleman-Weinberg Potentials $V_{CW}(\hat{\phi})$ ergibt. Das effektive Potential in Landau-Eichung ist daher in dieser nullten Ordnung gerade durch die konvexe Hülle von $V_{CW}(\hat{\phi})$ gegeben. Ein Phasenübergang 1. Ordnung, für den auch die Clausius-Clapeyron Gleichungen erfüllt sind, wird nun durch einen diskontinuierlichen Sprung des Minimums von $V_{CW}(\hat{\phi})$ angezeigt. Hierdurch ergibt sich eine neue asymptotische Form der Phasentrennfläche $\zeta_c(e^2, \lambda)$ im Bereich $\lambda = \hat{\lambda} e^4$. Die Schnittlinie der beiden Phasentrennflächen führte schließlich zu einer störungstheoretischen Vorhersage über den Verlauf einer trikritischen Linie in diesem Modell.

Zum Abschluß möchte ich etwas weiterführend über mögliche Konsequenzen im Hinblick auf einen eventuellen Kontinuumslikes spekulieren. Zunächst sei daran erinnert, daß die Proportionalitätskonstante $3/16\pi^2$ in der Formel (4.49) für $\lambda_{tc}(e^2)$ von der Gitterkonstanten unabhängig war. Da es eine allgemein akzeptierte Grundtatsache ist, daß Renormierungsgruppenflüsse Phasentrennflächen und -linien nicht durchschneiden können, wird uns die Schlußfolgerung nahegelegt, daß die trikritische Linie selbst eine Trajektorie des Renormierungsgruppen-

flusses ist. Ein Blick in die Standardliteratur (siehe z.B. [Cheng et al. 1974] zeigt, daß dies mit den üblichen β -Funktionen, wie sie aus einer Loop-Entwicklung gewonnen werden, nicht verträglich ist. Eine sehr einfache Erklärung hierfür bietet jedoch die Feststellung, daß in der Higgsphase die Loop-Entwicklung höchstens für jedes feste Verhältnis $\lambda / e^2 > 0$ asymptotisch in $\hbar$ ist, aber nicht gleichmäßig asymptotisch im Limes $\lambda / e^2 \rightarrow 0$. In der Tat, nach den Ergebnissen und Diskussionen von § 4.4, insbesondere den unterschiedlichen Phasentrennflächen und der Existenz der trikritischen Linie, scheint mir dies eine unausweichliche Konsequenz zu sein. Für $\lambda = 0$ gilt beispielsweise nach der Loop-Entwicklung (4.32) $\tilde{g}_c(e^2, \lambda = 0) = e^2 (d-1) \int \tilde{\Delta}^{-1}(k)$, während nach (4.46) $\hat{g}(\hat{\lambda} = 0) = x_{\tilde{g}}(t_c = \infty) = 0$ gilt. Die 2. Gleichung ist hierbei sicherlich die glaubhaftere, da für $\lambda = 0$ das Modell nur für $\tilde{g} \leq 0$ stabil und wohldefiniert ist. Es wäre daher in jedem Fall lehrreich und gerade im Zusammenhang mit dem Coleman-Weinberg Mechanismus auch konsistent, die β -Funktionen einmal in der hier besprochenen neuen Asymptotik zu berechnen. Falls dann die trikritische Linie tatsächlich als Flußlinie auftritt, wäre ihr UV-Endpunkt, der vermutlich bei $\lambda = \infty$ liegen dürfte, als Kandidat für einen nicht-trivialen Fixpunkt natürlich hochinteressant. Da sie nur auf dem Rand der Phasentrennfläche enden kann, müßte dieser Endpunkt auf der Phasentrennlinie des Modells mit eingefrorener Länge $\lambda \rightarrow \infty$, $\tilde{g}_c / \lambda \rightarrow v_c^2(e^2)$, zu finden sein. In der Tat läßt eine relativ neue Monte-Carlo Renormierungsgruppenuntersuchung von [Callaway, Petronzio 1986] den Schluß zu, daß dieses Modell einen dementsprechenden Fixpunkt haben könnte. Noch interessanter wäre natürlich eine Übertragung der Ergebnisse dieses Kapitels auf nicht-abelsche Higgsmodelle, im Zusammenhang mit dem Standardmodell insbesondere auf SU(2)-Higgsfelder in der fundamentalen Darstellung. Aufgrund vorläufiger Rechnungen in dieser Richtung bin ich hoffnungsvoll, daß sich im störungstheoretischen Bereich qualitativ dasselbe Phasendiagramm ergeben wird wie im abelschen Fall. Da das reine nicht-abelsche Eichmodell asymptotisch frei ist, könnte man hier jetzt über die Möglichkeit spekulieren, daß der Renormierungsgruppenfluß für $\lambda \leq \lambda_{tc}(e^2)$ asymptotisch frei bleibt und erst für $\lambda > \lambda_{tc}$ in Richtung $\lambda \rightarrow \infty$ strebt.

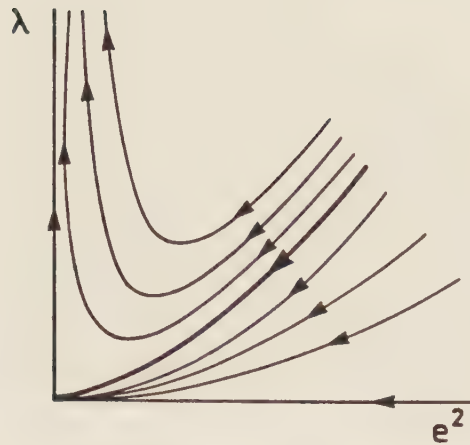


Fig 4.1: Spekulativer RG-Fluß im fundamentalen SU(2)-Higgsmodell unter Berücksichtigung einer trikritischen Linie λ_{tc} . Die Flußrichtung weist ins Ultraviolette.

Abermals würde eine Analyse der üblichen β -Funktionen dem widersprechen [Hasenfratz² 1986]. Da eine Abweichung jedoch durchaus erst für $\lambda \ll e^2$ eintreten kann, müßte man auch hier versuchen, eine konsistente Entwicklung im Bereich $\lambda \sim e^4$ durchzuführen.

Mit diesen Anregungen und Spekulationen will ich dieses Kapitel und damit die Arbeit insgesamt abschließen. Wie ich meine, sind einige Fragen und Probleme hier beantwortet worden. Gleichzeitig jedoch, und das dürfte als Charakteristikum für die Physik wie die Naturwissenschaften insgesamt gelten, haben sich etliche neue und interessante aufgetan. In diesem Sinne halte ich auch eine weitere Klärung für nach wie vor notwendig und werde selbst versuchen, in näherer Zukunft hierzu beizutragen.

Anhang A

Zellenkomplexe: Notationen und Grundbegriffe

In diesem Anhang werden die verwendeten Begriffe und Notationen aus der Theorie der Zellenkomplexe definiert. Das meiste findet sich in mehr oder weniger abgewandelter Form in der Literatur (siehe z.B. [Guth 1980; Drühl, Wagner 1982; Hooking, Young 1961; Aleksandrov 1957]).

p-Zellen:

Es seien $(x_0, \dots, x_p) \in (\mathbb{Z}^d)^{p+1}$, $0 \leq p \leq d$, so daß die Vektoren $(x_i - x_0)$ für $i = 1, \dots, p$ paarweise orthonormiert sind. Dann ist die von $(x_0, \dots, x_p)$ aufgespannte p-Zelle definiert als

$$\langle x_0, \dots, x_p \rangle := \left\{ x = x_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i (x_i - x_0) \mid \alpha_i \in [0,1] \right\}$$

Die Menge aller p-Zellen bezeichne ich mit Λ_p^∞ und $\Lambda^\infty = \Lambda_0^\infty \cup \dots \cup \Lambda_d^\infty$. Oft ist es zweckmäßig, zusätzlich $\Lambda_{-1}^\infty = \Lambda_{d+1}^\infty = \emptyset$ zu setzen.

Orientierte p-Zellen:

Orientierte p-Zellen sind Elemente aus $\Lambda_p^\infty \times \mathbb{Z}_2 =: [\Lambda_p^\infty]$. Für $c \in [\Lambda_p^\infty]$ verwende ich die Notation $c = (|c|, \zeta(c)) \in \Lambda_p^\infty \times \mathbb{Z}_2$. $\zeta(c)$ ist die Orientierung von c und $-c$ ist dieselbe Zelle mit umgekehrter Orientierung: $|-c| = |c|$, $\zeta(-c) = -\zeta(c)$. Für $p \geq 1$ wird die Orientierung auch durch die Anordnung der Punkte $x_0, \dots, x_p$ ausgedrückt:

$$[x_0, \dots, x_p] := (\langle x_0, \dots, x_p \rangle, \zeta(x_1 - x_0, \dots, x_p - x_0))$$

wobei $\zeta(b_1, \dots, b_p) = +1$, falls es einen Satz von kanonischen Einheitsvektoren $(e_{i_1}, \dots, e_{i_p})$ des $\mathbb{R}^n$ gibt mit $i_1 < i_2 < \dots < i_p$ und $b_j = A_{jk} e_{i_k}$, $\det A = 1$. Andernfalls setzen wir $\zeta(b_1, \dots, b_p) = -1$. Zellen mit positiver Orientierung aus $[\Lambda_p^\infty]$ werden oft ohne explizite Erwähnung mit unorientierten Zellen aus Λ_p identifiziert. Schließlich bezeichnet $[\Lambda^\infty] := [\Lambda_0^\infty] \cup \dots \cup [\Lambda_d^\infty]$.

Rand und Korand:

Der orientierte Rand einer orientierten p -Zelle ist definiert als

$$\begin{aligned} \partial(\langle x_p \rangle, \pm 1) &= \emptyset & , p = 0 \\ \partial[x_0, x_p] &= \{(\langle x_0 \rangle, -1), (\langle x_p \rangle, 1)\} & , p = 1 \\ \partial[x_0, \dots, x_p] &= \\ = \{[y_0, \dots, y_{p-1}] \mid \exists y_p \in Z^d : [x_0, \dots, x_p] = [y_0, \dots, y_p]\} & , p \geq 2 \end{aligned}$$

Für $c \in [\Lambda_p^\infty]$ ist ∂c also eine Teilmenge von $[\Lambda_{p-1}^\infty]$. Umgekehrt ist der orientierte Korand von c gegeben als

$$\partial^* c = \{q \in \Lambda_{p+1}^\infty \mid c \in \partial q\}$$

Für $K \subset [\Lambda^\infty]$ setze ich

$$\partial K := \bigcup_{c \in K} \partial c, \quad \partial^* K := \bigcup_{c \in K} \partial^* c$$

Offen und Abgeschlossen:

Der (geometrische) Rand einer Teilmenge von unorientierten Zellen $\Lambda \subset \Lambda^\infty$ ist definiert als

$$\partial \Lambda = \bigcup_{p=0}^{d-1} \{q \in \Lambda_p^\infty \mid \exists \alpha \in \Lambda_{p+1}^\infty \cap \Lambda, \alpha' \in \Lambda_{p+1}^\infty \cap \Lambda^c : q \subset \alpha \cap \alpha'\}$$

Hierbei ist $\Lambda^c := \Lambda^\infty \setminus \Lambda$ das Komplement von Λ . Analog ist der (geometrische) Korand von Λ definiert:

$$\partial^* \Lambda = \bigcup_{p=1}^d \{\alpha \in \Lambda_p^\infty \mid \exists q \in \Lambda_{p-1}^\infty \cap \Lambda, q' \in \Lambda_{p-1}^\infty \cap \Lambda^c : q \cup q' \subset \alpha\}$$

Falls $\Lambda = \{q\} \subset \Lambda^\infty$ nur eine Zelle enthält, so schreibe ich ∂q bzw. $\partial^* q$ anstatt $\partial\{q\}$ bzw. $\partial^*\{q\}$. Der Abschluß (abgeschlossene Hülle) von Λ ist definiert als

$$\bar{\Lambda} = \bigcup_{q \in \Lambda} \partial q$$

Der offene Kern $\overset{\circ}{\Lambda} \subset \Lambda$ ist gegeben durch

$$\overset{\circ}{\Lambda} := \Lambda^\circ - \overline{\Lambda^c}$$

Λ heißt offen bzw. abgeschlossen, wenn $\Lambda = \overset{\circ}{\Lambda}$ bzw. $\Lambda = \overline{\Lambda}$. Manchmal ist es noch zweckmäßig, die offene Hülle $\overset{+}{\Lambda} \supset \Lambda$ und den abgeschlossenen Kern $\overline{\Lambda} \subset \Lambda$ zu definieren:

$$\overset{+}{\Lambda} := \bigcup_{q \in \Lambda} \partial^* q, \quad \overline{\Lambda} := \Lambda^\circ - \overline{\Lambda^c}$$

Das in Kapitel 2,3 verwendete $\hat{\Lambda}$ läßt sich hiermit definieren als $\hat{\Lambda} := \overset{+}{\Lambda}$.

Komplexe und Unterkomplexe:

Die zentrale Eigenschaft, die $[\Lambda^\circ]$ zu einem Komplex macht, ist die folgende:

Eigenschaft (K):

Sei $K = K_0 \cup \dots \cup K_d$, $K_p \subset [\Lambda_p^\circ]$ und $K = -K$.

Sei $q \in K_{p-1}$, $c \in K_{p+1}$. Dann ist die Zahl der $b \in \partial^*(q) \cap \partial c \cap K$ gleich der Zahl der $b \in \partial^* q \cap \partial c \cap K$ (gleich der Zahl der $b \in \partial^* q \cap \partial(-c) \cap K$).

Für $K_p = [\Lambda_p^\circ]$, $0 \leq p \leq d$, kann man sich leicht überlegen, daß diese Eigenschaft immer erfüllt ist. Jede $(p-1)$ -Zelle q hat nämlich in ihrem Korand entweder gar keine oder genau 2 p -Zellen b aus dem unorientierten Rand einer gegebenen $(p+1)$ -Zelle c . Von diesen stimmt wiederum nur genau eine mit der Orientierung von ∂c überein. Eine Teilmenge $K \subset [\Lambda^\circ]$ heißt nun Unterkomplex, falls sie die Eigenschaft (K) erfüllt und $K = -K$ gilt. Der von einer Teilmenge $\Lambda_0 \subset \Lambda_0^\circ$ erzeugte offene Unterkomplex ist rekursiv definiert als $[\Lambda] = [\Lambda_0] \cup \dots \cup [\Lambda_d]$ mit $[\Lambda_p] := \partial^*[\Lambda_{p-1}]$. Da ein Unterkomplex eindeutig durch seine positiv orientierten Zellen bestimmt ist, werde ich sprachlich oft nicht mehr zwischen beiden unterscheiden.

p-Formen (-Ketten, -Koketten)

Ich werde nicht zwischen Ketten und Koketten unterscheiden und sie allgemein als (Gitter-) p -Formen bezeichnen. Sei G eine abelsche Gruppe, deren Gruppenoperation für das folgende additiv geschrieben wird. Eine G -wertige p -Form

ist eine Abbildung $\omega: [\Lambda_p^\infty] \rightarrow G$ mit $\omega(-c) = -\omega(c)$. Die Gruppe der G -wertigen p -Formen bezeichne ich mit $\Omega^p(G)$. $C^p(G) \subset \Omega^p(G)$ ist die Untergruppe der p -Formen mit endlichem Träger. Falls $K \subset [\Lambda^\infty]$ ein Unterkomplex ist, so bezeichnet $\Omega_K^p(G)$ die Gruppe der G -wertigen p -Formen auf K . Falls die Spezifizierung von G fehlt, ist in dieser Arbeit immer $G = \mathbb{R}$ gemeint.

$d, d^*, d_K, d_K^*, i_K, \pi_K$

$$d: \Omega^p(G) \rightarrow \Omega^{p+1}(G), \quad d\omega(c) := \sum_{b \in \partial c} \omega(b)$$

$$d^*: \Omega^p(G) \rightarrow \Omega^{p-1}(G), \quad d^*\omega(q) := \sum_{b \in \partial^* q} \omega(b)$$

Für $\omega \in \Omega^d(G)$ setzt man $d\omega = 0$ und für $\omega \in \Omega^0(G)$ $d^*\omega = 0$ (formal könnte man $\Omega^{-1}(G) = \Omega^{d+1}(G) = \{0\}$ definieren). d_K und d_K^* ist entsprechend auf $\Omega_K^p(G)$ definiert, wobei auf der rechten Seite ∂ durch $\partial_K c = \partial c \cap K$ bzw. $\partial^* q$ durch $\partial_K^* q = \partial^* q \cap K$ zu ersetzen ist. Aufgrund der Eigenschaft (K) gilt $dd = d^*d^* = 0$ und $d_K d_K = d_K^* d_K^* = 0$ für jeden Unterkomplex K . Weiter bezeichne

$$i_K: \Omega_K(G) \rightarrow \Omega(G)$$

$$\pi_K: \Omega(G) \rightarrow \Omega_K(G)$$

die kanonische Erweiterung bzw. Einschränkung. Dann ist $\pi_K i_K = \text{id}_K$ und $P_K = i_K \pi_K$ ist idempotent: $P_K^2 = P_K$. Außerdem gilt $d_K = \pi_K d i_K$ und $d_K^* = \pi_K d^* i_K$. Schließlich haben wir ein wichtiges Lemma (siehe z.B. [Aleksandrov 1957]).

Lemma A1: Sei $K \subset [\Lambda^\infty]$ ein Unterkomplex

a) Falls K abgeschlossen ist, so gilt

$$\pi_K d = d_K \pi_K \quad \text{und} \quad i_K d_K^* = d^* i_K$$

b) Falls K offen ist, so gilt

$$\pi_K d^* = d_K^* \pi_K \quad \text{und} \quad i_K d_K = d i_K$$

Duales Gitter

Den zu Λ dualen Komplex Λ^* erhält man, indem man alle Zellen um eine halbe Einheit in alle positiven Koordinatenrichtungen verschiebt. Die Abbildung $*$: $\Lambda \rightarrow \Lambda^*$ ordnet jeder p -Zelle $c \in \Lambda_p$ die eindeutig bestimmte $(d-p)$ -Zelle $c^* \in \Lambda_{d-p}^*$ zu, für die $c \cap c^* \neq \emptyset$ gilt. Für orientierte Zellen wird sie zusätzlich orientierungserhaltend definiert. Die Abbildung $*$ führt die Operationen $\partial, \partial^*, d, d^*$ auf Λ^∞ über in $\partial^*, \partial, d^*, d$ auf $\Lambda^{\infty*}$. Dementsprechend werden auch offene Teilmengen in abgeschlossene abgebildet und umgekehrt.

Zum Schluß dieses Anhangs beweise ich die im Anschluß an Theorem 2.29 gemachte Bemerkung, daß $d_\Lambda(F) = |\text{supp } F|$ für $F \in \Omega_\Lambda^2(Z)$ wie in Fig. 4. skizziert. Ich beschränke mich zunächst auf $d = 3$. Wir betrachten 2 Würfel mit Monopolladung $+1$ und -1 und nennen diese Monopolverteilung $M \in \Omega_\Lambda^3(Z)$. Zu zeigen ist, daß der Träger jeder 2-Form $n_2 \in \Omega_\Lambda^2(Z)$ mit $d_\Lambda n_2 = M$ eine Mindestgröße hat, die durch den Abstand der Monopole gegeben ist (falls Λ groß genug ist). Hierzu wählen wir eine geschlossene Fläche S , die einen der Monopole umschließt, den anderen nicht. Nach dem Stoke'schen Satz ist das "Flächenintegral" $\sum_{p \in S} n_2(p)$ gerade gleich der eingeschlossenen Monopolldung. $|\text{supp } n_2|$ ist also nach unten beschränkt durch die maximale Anzahl solcher paarweise disjunkten Flächen S . Falls Λ groß genug ist, ist diese Anzahl gegeben durch die Anzahl der Plaketten dual zur geraden Verbindungslinie zwischen den beiden Monopolen. Den Fall $d \geq 4$ können wir auf diesen Fall zurückführen, indem wir das d -dimensionale Gitter in 3-dimensionale "Blätter" K_t , $t \in \mathbb{Z}^{d-3}$, zerschneiden. Jedes K_t ist ein abgeschlossener Unterkomplex von Λ . Mit

$\pi_{K_t} : \Omega_\Lambda \rightarrow \Omega_{K_t}$ gilt also nach Lemma A1 $\pi_{K_t} d_\Lambda n_2 = d_{K_t} \pi_{K_t} n_2$. Hiermit erhalten wir wie oben eine untere Schranke für $|\text{supp } \pi_{K_t} n_2|$. Indem wir dies für alle t mit $\pi_{K_t} d_\Lambda n_2 \neq 0$ durchführen, erhalten wir das Flächengesetz bzw. entsprechende Verallgemeinerungen auf höhere Dimensionen.

Anhang B

Eigenschaften von Δ , Δ^2 und Spinmodellen mit Wirkung $S^{\text{Spin}}(\Delta \chi)$

Den Spinwellenargumenten zum Beweis von $\langle \phi \rangle_\alpha = 0$ für $\alpha > 0$ sowohl in § 2.1 wie auch in § 3.1 ist eine technische Schwierigkeit gemeinsam, die auf den unterschiedlichen Definitionsmöglichkeiten des Laplace-Operators (bzw. dessen Quadrat) mit 0-Dirichlet Randbedingungen beruht. Zunächst ist für einen beliebigen Unterkomplex $\Lambda \subset \Lambda^\infty$ der Laplace-de Rham Operator eindeutig definiert als

$$\Delta_\Lambda = d_\Lambda^* d_\Lambda + d_\Lambda d_\Lambda^*$$

Außer in Spezialfällen gilt aber hiermit im allgemeinen nicht ^(*) $\Delta_\Lambda = \pi_\Lambda \Delta i_\Lambda$. Einen solchen Spezialfall erhält man beispielsweise durch Einschränkung von Δ_Λ auf 0-Formen aus Ω_Λ^0 , falls Λ offen ist. In den nicht-kompakten und kompakten Spinmodellen, die in Satz 2.2, Lemma 2.6 und Lemma 3.7 auftreten, ist die Wirkung jedoch immer eine Funktion von $\Delta i_\Lambda \chi$ mit $\chi \in \Omega_\Lambda^0(\mathbb{R})$ oder $\chi \in \Omega_\Lambda^0(U(1))$. Dies hat zur Folge, daß man letztendlich Eigenschaften der quadratischen Form $(\Delta i_\Lambda)^*(\Delta i_\Lambda) = \pi_\Lambda \Delta^2 i_\Lambda$ bzw. ihrer Inversen, der Kovarianz $C_\Lambda = (\pi_\Lambda \Delta^2 i_\Lambda)^{-1}$, studieren muß. Wenn wir für offene Λ wie im Beweis von Satz 2.2 definieren:

$$S_\Lambda : \Omega_\Lambda^0 \rightarrow \Omega_{\partial\Lambda}^0, \quad (S_\Lambda \psi)(x) := \sum_{\gamma: \langle x, \gamma \rangle \in \Lambda} \psi(\gamma)$$

so gilt

$$\pi_\Lambda \Delta^2 i_\Lambda = \Delta_\Lambda^2 + S_\Lambda^* S_\Lambda \equiv C_\Lambda^{-1}$$

und daher

$$0 \leq \Delta_\Lambda^{-2} - C_\Lambda \leq \Delta_\Lambda^{-2} S_\Lambda^* S_\Lambda \Delta_\Lambda^{-2} \quad (\text{B } 1)$$

(*) Man vergleiche auch mit dem Unterschied zwischen den Gauß'schen Maßen $d\mu_{\Lambda, \alpha}$ (2.18) und $d\mu_{\Lambda^\infty, \alpha}$ (2.21). Für $\alpha = 1$ ist ersteres mit Kovarianz $(\pi_\Lambda \Delta i_\Lambda)^{-1}$ und letzteres mit Kovarianz Δ_Λ^{-1} . Monotones Verhalten in Λ zeigt nur die erste Version.

Um zu zeigen, daß in $2 \leq d \leq 4$

$$\lim_{\Lambda \uparrow \Lambda^\infty} (q, C_\Lambda q) = \infty$$

$\forall q \in C^0(\mathbb{Z})$ mit $\sum_x q(x) \neq 0$ gilt, verwenden wir (B1) folgendermaßen:
Setze für $a \in \mathbb{Z}^d$

$$p_{a,q}(x) := 2q(x) - q(x-a) - q(x+a)$$

Falls gezeigt ist, daß C_Λ monoton in Λ wächst, so ist $\lim_{\Lambda \uparrow \Lambda^\infty} (q, C_\Lambda q)$ translationsinvariant und daher durch eine Schwartz'sche Ungleichung

$$\lim_{\Lambda \uparrow \Lambda^\infty} (p_a, C_\Lambda p_a) \leq 16 \lim_{\Lambda \uparrow \Lambda^\infty} (q, C_\Lambda q)$$

Als nächstes zeigt man mit Hilfe von (B1) $(p_a, C_\Lambda p_a) \rightarrow (p_a, \Delta^{-2} p_a)$ für $\Lambda \uparrow \Lambda^\infty$ und die Behauptung folgt dann aus der Tatsache, daß

$$\lim_{a \rightarrow \infty} (p_a, \Delta^{-2} p_a) = \infty$$

wie man sich durch Fouriertransformation leicht überlegen kann (s. auch Appendix A von [Borgs, Nill 1986a]).

Lemma B1: C_Λ wächst monoton in Λ .

Beweis: Genaugenommen ist die Behauptung, daß $\pi_\Lambda^* C_\Lambda \pi_\Lambda$ monoton in Λ wächst. Für $K \subset \Lambda$ sei daher

$$(q, Q_{\Lambda,K,m} q) := (q, \pi_\Lambda \Delta^2 i_\Lambda q) + m \sum_{x \in \Lambda_0 \setminus K_0} q(x)^2$$

Dann ist $Q_{\Lambda,K,m}$ monoton wachsend in m und $Q_{\Lambda,K,0} = C_{\Lambda,K}^{-1}$. Folglich

$$C_\Lambda \geq \lim_{m \rightarrow \infty} Q_{\Lambda,K,m}^{-1} = \pi_{K,\Lambda}^* C_K \pi_{K,\Lambda}$$

wobei $\pi_{K,\Lambda} : \Omega_\Lambda \rightarrow \Omega_K$ die kanonische Restriktion ist. Wir erhalten also

$$\pi_\Lambda^* C_\Lambda \pi_\Lambda \geq \pi_\Lambda^* \pi_{K,\Lambda}^* C_K \pi_{K,\Lambda} \pi_\Lambda = \pi_K^* C_K \pi_K$$



Lemma B2:

$$\lim_{\Lambda} (p_a, (\Delta_{\Lambda}^{-2} - C_{\Lambda}) p_a) = 0$$

Beweis:

Es genügt die Aussage für $q(x) = \delta_0(x)$ zu zeigen, d.h. für

$$p_{a,0}(x) := 2 \delta_0(x) - \delta_0(x-a) - \delta_0(x+a)$$

Die allgemeine Aussage folgt dann wegen

$$p_{a,q} = \sum_Y q(y) p_{a,y} \text{ mit } p_{a,y}(x) := p_{a,0}(x-y)$$

aus der Cauchy-Schwarz Ungleichung

$$\begin{aligned} & (p_{a,q}, \sigma_{\Lambda} p_{a,q}) \\ & \leq \sum_{Y,Y'} |q(Y) q(Y')| (p_{a,Y}, \sigma_{\Lambda} p_{a,Y})^{1/2} (p_{a,Y'}, \sigma_{\Lambda} p_{a,Y'})^{1/2} \end{aligned}$$

und der Tatsache, daß $\sigma_{\Lambda} = \Delta_{\Lambda}^{-2} - C_{\Lambda}$ im thermodynamischen Limes translationsinvariant ist.

Wegen (B1) bleibt also zu zeigen:

$$\lim_{\Lambda} \| S_{\Lambda} \Delta_{\Lambda}^{-2} p_{a,0} \|^2 = 0 \quad (\text{B 2})$$

Wegen der Monotonie von C_{Λ} genügt es, (B2) für eine spezielle Folge $\Lambda \uparrow \Lambda^{\infty}$ zu zeigen. Ich wähle für Λ offene, kubische, am Ursprung zentrierte Gitter mit Kantenlänge $2L+1$. Dann gilt:

$$\| S_{\Lambda} \Delta_{\Lambda}^{-2} p_{a,0} \|^2 = \sum_{i=1}^d \sum_{x \in \Lambda_0, |x_i|=L-1} [(\Delta_{\Lambda}^{-2} p_{a,0})(x)]^2$$

Wenn wir $a = (a, 0, \dots, 0) \in \mathbb{Z}^d$ wählen, so genügt es aus Symmetriegründen, die Summe über die Flächen $x_1 = -L+1$ und $x_2 = -L+1$ zu betrachten. Setze

$$e_{k,\mu}(x) := \sin k_{\mu}(x_{\mu}-L) \quad , \quad k_{\mu} \in \frac{\pi}{2L} \{1, \dots, 2L-1\}$$

Dann bilden die Funktionen

$$e_k(x) := L^{-d/2} \prod_{\mu=1}^d e_{k,\mu}(x)$$

ein Orthonormalsystem von Eigenvektoren von Δ_λ , und es gilt

$$\sum_{\substack{x \in \Lambda_0 \\ x_i = -L+1}} [(\Delta_\lambda^{-2} p_{a,0})(x)]^2 = \frac{1}{L^2} \sum_{k_i, k'_i} \sin k_i \sin k'_i \frac{1}{L^{d-1}} \sum_{\vec{k}} \frac{\tilde{p}_{a,0}(k_i, \vec{k}) \tilde{p}_{a,0}(k'_i, \vec{k})}{\tilde{\Delta}(k_i, \vec{k})^2 \tilde{\Delta}(k'_i, \vec{k})^2} \quad (B3)$$

wobei $\vec{k} = (k_j)_{j \neq i}$ und

$$\begin{aligned} \tilde{p}_{a,0}(k) &= L^{d/2} \sum_{x \in \Lambda_0} e_K(x) p_{a,0}(x) \\ &= (2 - 2 \cos k_1 a_1) \prod_{\mu=1}^d \sin(k_\mu L) \end{aligned}$$

Wegen $\sin(k_\mu L) \in \{\pm 1, 0\}$ folgt

$$\tilde{p}_{a,0}(k_i, \vec{k}) \tilde{p}_{a,0}(k'_i, \vec{k}) = \begin{cases} 0 & \text{falls } \exists \mu : k_\mu = \frac{n\pi}{L} \\ \sin k_i L \sin k'_i L g_a(k_i, k'_i, \vec{k}) & \text{sonst} \end{cases}$$

wobei

$$g_a(k_i, k'_i, \vec{k}) = \begin{cases} (2 - 2 \cos k_1 a_1)(2 - 2 \cos k'_1 a_1) & i = 1 \\ (2 - 2 \cos k_1 a_1)^2 & i \neq 1 \end{cases}$$

Nun summieren wir in (B3) separat über $\{k_i, k'_i \mid \sin k_i L \sin k'_i L = +1\}$ und $\{k_i, k'_i \mid \sin k_i L \sin k'_i L = -1\}$. Wir erhalten eine Differenz von zwei Riemann-Summen, die im Limes $L \rightarrow \infty$ beide gegen das gleiche Integral konvergieren:

$$\text{const.} \int_0^\pi dk_i dk'_i \sin k_i \sin k'_i \int_0^\pi d\vec{k} \frac{g_a(k_i, k'_i, \vec{k})}{\tilde{\Delta}(k_i, \vec{k})^2 \tilde{\Delta}(k'_i, \vec{k})^2}$$

Dieses Integral ist in $d \geq 2$ endlich und (B3) konvergiert daher gegen Null für $L \rightarrow \infty$. $\blacksquare$

Beweis von Lemma 3.7

Der Beweis von Lemma 3.7 beruht auf analogen Methoden. Wir schreiben $g = e^{i\chi} \in U(1)$ und führen im Funktionalintegral des unnormierten Erwartungswerts $Z_{\Lambda, \alpha}^{\text{Spin}} E_{\Lambda, \alpha}^{\text{Spin}} (g^{P_a} | 1)$ die komplexe Translation

$$\chi \mapsto \chi + i\psi, \quad \psi := \delta \alpha \Delta_{\Lambda}^{-2} P_a$$

durch. $\delta \in [0, 1]$ wird später festgelegt. Dies bedeutet, daß wir den Integrationsweg in der komplexen χ -Ebene verschieben, wobei sich das Integral wegen der Periodizität des Integranden nicht verändert. Nun benützen wir

$$|e^{\frac{1}{\alpha} \cos(\chi + i\psi)}| \leq e^{\frac{1}{\alpha} \cos \chi} e^{\frac{1}{\alpha} (\cosh \psi - 1)}$$

und erhalten

$$|E_{\Lambda, \alpha}^{\text{Spin}} (g^{P_a} | 1)| \leq e^{-(P_a, \psi)} e^{\frac{1}{\alpha} \sum_{x \in \Lambda_0} [\cosh (\Delta_{\Lambda} \psi)(x) - 1]} \quad (\text{B4})$$

Für $x \in \Lambda_0$ gilt $(\Delta_{\Lambda} \psi)(x) = (\Delta_{\Lambda} \psi)(x) = \alpha \delta (\Delta_{\Lambda}^{-1} P_a)(x)$.

In $d \geq 3$ bleibt dies gleichmäßig in Λ und α beschränkt, und deswegen

$$e^{\frac{1}{\alpha} \sum_{x \in \Lambda_0} [\cosh (\Delta_{\Lambda} \psi)(x) - 1]} \leq e^{\delta^2 \alpha \text{const.} (P_a, \Delta_{\Lambda}^{-2} P_a)} \quad (\text{B5})$$

wobei const. nur von d abhängt. Nun wählen wir

$$\delta := \min \{1, (2 \text{ const.})^{-1}\}$$

und erhalten

$$e^{-(P_a, \psi)} e^{\frac{1}{\alpha} \sum_{x \in \Lambda_0} [\cosh (\Delta_{\Lambda} \psi)(x) - 1]} \leq e^{-\frac{\delta \alpha}{2} (P_a, \Delta_{\Lambda}^{-2} P_a)}$$

Lemma 3.7 folgt, falls gezeigt ist, daß der Randterm in (B4)

$$\exp \frac{1}{\alpha} \sum_{x \in \partial \Lambda} [\cosh (\Delta i_{\Lambda} \psi)(x) - 1]$$

im thermodynamischen Limes gegen 1 geht. Dies folgt jedoch wegen $(\Delta i_{\Lambda} \psi)(x) = -(S_{\Lambda} \psi)(x)$, $\forall x \in \partial \Lambda$, mit geringfügigen Variationen genauso wie (B2). (Im wesentlichen ist zu zeigen, daß (B2) auch gültig bleibt, falls $p_{a,0}(x)$ durch $p_{a,y}(x) := p_{a,0}(x-y)$ ersetzt wird. Die Fouriertransformierte ist dann gegeben durch

$$\tilde{p}_{a,y}(k) = (2-2 \cos k_1 a_1) \prod_{\mu=1}^d \sin k_{\mu} (y_{\mu}-L)$$

und das Argument mit den alternierenden Vorzeichen geht nach Anwendung der trigonometrischen Identität für $\sin(a-b)$ durch wie zuvor.) Es bleibt der Fall $d = 2$ zu diskutieren, für den die Konstante "const." in (B5) (und deshalb auch γ) nicht mehr unabhängig von a gewählt werden kann. Dies kann behoben werden, indem wir statt $q(x)$ die Dipolverteilung $s(x) = q(x) - q(x-\delta)$ betrachten ($\delta \in \mathbb{Z}^d$ fest). Falls $\langle g^s \rangle_{\alpha}^{\text{Spin}} = 0$, so folgt dies per Korrelationsungleichungen auch für den Erwartungswert von g^q . Wenn wir jetzt in (B4) $p_{a,q}$ durch $p_{a,s}$ ersetzen, ist "const." wieder unabhängig von a wählbar, da das Dipolpotential $\Delta_{\Lambda}^{-1} s$ auch in 2 Dimensionen beschränkt bleibt. Andererseits gilt in $d = 2$ immer noch

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} (p_{a,s}, \Delta^{-2} p_{a,s}) = \infty$$

falls $\sum_x q(x) \neq 0$, so daß die restliche Argumentation gleich bleibt wie zuvor, und es folgt $\langle g^s \rangle_{\alpha}^{\text{Spin}} = 0$.

Insbesondere ist also in $d = 2$ sogar die Zweipunktfunktion identisch gleich Null, falls $\alpha > 0$.

Beweis von Lemma 2.6

Zunächst schreiben wir

$$J(x) = |J(x)| (\cos \psi(x), \sin \psi(x))$$

und erhalten

$$J_1(x) \cos(\chi_x + \varphi_x) + J_2(x) \sin(\chi_x + \varphi_x) = \\ |J(x)| \cos(\chi_x + \varphi_x - \psi_x)$$

Als nächstes führen wir eine globale Verschiebung $\chi_x \rightarrow \chi_x + \delta$ mit $\delta \in \mathbb{R}$ durch. Dies liefert

$$e^{i\delta \sum_x q(x)} E_{\lambda, \alpha, \beta, \varphi}^{\text{Spin}}(e^{i(\chi, q)} | \hat{\chi}, 0) = E_{\lambda, \alpha, \beta, \varphi - \varphi - \delta}^{\text{Spin}}(e^{i(\chi, q)} | \hat{\chi} + \delta, \delta)$$

wobei $|J|$ als $(|J|, 0)$ zu lesen ist. Nun wählen wir δ so, daß die linke Seite reell und ≥ 0 ist. Auf der rechten Seite dürfen wir dann $e^{i(\chi, q)}$ durch $\cos(\chi, q)$ ersetzen. Hiermit sind wir in der Situation für eine Anwendung der Korrelationsungleichungen von [Messenger et al. 1978]: der Erwartungswert von $\cos(\chi, q)$ wächst, wenn wir die Phasen $\varphi_x - \varphi_x - \delta = 0$ und die Randbedingungen $\hat{\chi}_x - \delta = 0$ und $\delta = 0$ setzen. Folglich

$$|E_{\lambda, \alpha, \beta, \varphi}^{\text{Spin}}(e^{i(\chi, q)} | \hat{\chi}, 0)| = E_{\lambda, \alpha, \beta, \varphi - \varphi - \delta}^{\text{Spin}}(\cos(\chi, q) | \hat{\chi} + \delta, \delta) \\ \leq E_{\lambda, \alpha, \beta}^{\text{Spin}}(\cos(\chi, q))$$

Hieraus folgt die Behauptung i), da der Erwartungswert von $\sin(\chi, q)$ mit diesen Randbedingungen Null ist. Behauptung ii) folgt ebenfalls sofort durch Ginibre-Ungleichungen.

Beweis von Lemma 3.3

Die Fouriertransformierte von $x \mapsto (dn)_{x, x+\hat{\mu}}$ ist

$$(e^{i\hat{p}} - 1) \frac{\tilde{q}(p)}{\tilde{\chi}(p)}$$

Entsprechendes gilt für $d\chi$, falls wir $\tilde{q}^2(p)$ durch $\tilde{m}(p)$ ersetzen. Da $\tilde{q}(p)$ und $\tilde{m}(p)$ analytisch sind mit $\tilde{q}(0) = \tilde{m}(0) = 0$, sind in $d \geq 2$ sowohl $\tilde{d}n$ als auch $\tilde{d}\chi$ aus $L^2([-\pi, \pi]^d)$. Wir dürfen das Skalarprodukt also im Impuls-

raum berechnen:

$$\begin{aligned}
 (d\chi, dn) &= \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{\tilde{m}(+p)^*}{\tilde{\Delta}(+p)} \sum_{\mu} (2 - 2 \cos p_{\mu}) \frac{\tilde{q}(p)}{\tilde{\Delta}(p)} \\
 &= \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \tilde{m}(p)^* \tilde{\Delta}(p)^{-1} \tilde{q}(p)
 \end{aligned}$$

Indem wir entweder die Definition von $\tilde{q}(p)$ oder die von $\tilde{m}(p)$ einsetzen, erhalten wir

$$= (\chi, \Delta n) = (\Delta \chi, n)$$



Anhang C

Schranken an die Polymeraktivitäten

In diesem Anhang werden die in Lemma (2.12) bzw. (2.19) behaupteten Schranken an die Polymeraktivitäten $z_\Lambda(\gamma, f)$ bewiesen, auf denen die Konvergenz der Clusterentwicklungen in den Beweisen von Satz 2.11, Theorem 2.17, Theorem 2.26 und Theorem 2.29 beruht. Der besseren Übersicht wegen seien die Definitionen noch einmal zusammengefaßt:

Sei $f(A, \varphi)$ periodisch in φ und eichinvariant. Wir setzen wie in (2.40) für $d_\Lambda n_2 = 0$

$$f_0(A, n_2) := f(A + 2\pi n_1(n_2), 0)$$

In Verallgemeinerung des Spezialfalls $f = e^{i(A+d\varphi, h)}$ von (2.24) sei nun

$$k_\Lambda(n_2, \gamma, f) := e^{-\frac{2\pi^2}{e^2} \|n_2\|^2} \int D_\Lambda W(H) \mathcal{S}^\gamma f_0(H, n_2) \quad (C1)$$

wobei

$$\mathcal{S}^\gamma = \prod_{p \in \gamma} \mathcal{S}_p$$

und

$$1 + \mathcal{S}_p = \exp \frac{1}{2e^2} [(dA)^2(p) + 4\pi n_2(p) dA(p)]$$

$D_\Lambda W$ ist das normierte Produktmaß auf $\mathcal{Q}_\Lambda^1(U(1))$

$$D_\Lambda W(A) = \prod_{b \in \Lambda_1} N^{-1} e^{a^2 \cos A_b} dA_b$$

Für $f(A) = dA(p)$ schreibe ich im Text auch $k_\Lambda(n_2, A, p)$. Im Zusammenhang mit dem Meissnereffekt (Theorem 2.26) benötigen wir auch

$$k_\Lambda(n_2, \gamma, f; H) = e^{-\frac{2\pi^2}{e^2} \|n_2\|^2 + \frac{4\pi^2}{e^2} (n_2, H)} \int D_\Lambda W^H(H) f_0 \mathcal{S}^\gamma$$

mit (*)

$$D_\Lambda W^H = \prod_{b \in \Lambda_1} N(d^*H(b))^{-1} e^{a^2 \cos H_b + \frac{2\pi}{|e^2|} H_b d^*H(b)} \quad (C2)$$

(*) Theorem 2.26 wird nur für reelle e^2 bewiesen.

wobei $H \in \Omega_{\Lambda}^2(\mathbb{R})$ ein äußeres Magnetfeld ist. Die in Lemma 2.12, Lemma 2.19 und Theorem 2.26 auftretenden Polymeraktivitäten sind nun alle von der Form:

$$z_{\Lambda}(\tilde{\gamma}, f, H) = \sum_{\gamma \subset \tilde{\gamma}} \sum_{\substack{d_{\Lambda} n_2 = 0 \\ \gamma \cup n_2 = \tilde{\gamma}}} k_{\Lambda}(n_2, \gamma, f, H) \quad (C3)$$

wobei $\tilde{\gamma} \subset \Lambda_2$ und $\gamma \cup n_2 := \gamma \cup \text{supp } n_2$. Die Aktivitäten der Polymerentwicklung für den 't Hooft-Loop (Theorem 2.29) können wir dagegen schreiben als

$$z_{\Lambda}^{tH}(\tilde{\gamma}, F) = \sum_{\gamma \subset \tilde{\gamma}} \sum_{\substack{d_{\Lambda} n_2 = d_{\Lambda} F \\ \gamma \cup n_2 = \tilde{\gamma}}} k_{\Lambda}(n_2, \gamma, 1, 0) \quad (C4)$$

Die erforderlichen Schranken an die Aktivitäten (C3) und (C4) ergeben sich aus den beiden nun folgenden Lemmata. Es bezeichne im weiteren $\gamma \setminus n_2 := \gamma \setminus (\gamma \cap n_2)$ und $\gamma \cap n_2 := \gamma \cap \text{supp } n_2$.

Lemma C 1:

Sei $r > 0$ fest und es gelte

$$k_{\Lambda}(\gamma, n_2, f, H) \leq N(f) e^{-\beta_1 \|n_2\|^2 + \beta_2(n_2, H) + r|\gamma| - \delta|\gamma \setminus n_2|} \quad (C5)$$

mit einer beliebigen Norm $N(f)$ und positiven Konstanten β_1, β_2, δ . Dann gibt es zu jedem $M > 0$ und $0 \leq s < 1$ ein $\beta_0(M, s) > 0$ und ein $\delta_0(M) > 0$, so daß

$$\sum_{\gamma \subset \tilde{\gamma}} \sum_{\substack{n_2 \in \Omega^2(\mathbb{Z}) \\ \gamma \cup n_2 = \tilde{\gamma}}} k_{\Lambda}(\gamma, n_2, f, H) \leq N(f) e^{-M|\tilde{\gamma}|} \quad (C6)$$

falls $\beta_1 \geq \beta_0(M, s)$, $\|H\|_{\infty} \leq s\beta_1/\beta_2$ und $\delta \geq \delta_0(M)$.

Beweis:

Wir schreiben

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} e^{-\beta_1 n^2 + \beta_2 n H(p)} \\
 & \leq 2 e^{-\beta_1} \cosh(\beta_2 \|H\|_\infty) + 2 \sum_{n \geq 2} e^{-\beta_1 n^2} \cosh(\beta_2 n \|H\|_\infty) \\
 & \leq 2 e^{\beta_1(s-1)} \left[1 + \sum_{n \geq 2} e^{-\beta_1(n^2+s-1)} \cosh(n \beta_2) \right]
 \end{aligned}$$

wobei wir $\beta_2 \|H\|_\infty \leq s \beta_1$ und $\cosh x \leq e^{|x|}$ ausgenutzt haben. Nun setzen wir

$$C_s(\beta_1) := \log \left[2 + 2 \sum_{n \geq 2} e^{-\beta_1(n^2-sn+s-1)} \right]$$

und erhalten

$$e^{-\beta_1 n^2 + \beta_2 n H(p)} \leq e^{C_s(\beta_1) - \beta_1(1-s)}$$

Für $X \subset Y \subset \tilde{\mathcal{Y}}$ folgt

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n_2 \in \Omega^2(\mathbb{Z})} |k_\lambda(Y, n_2, f, H)| \\
 & \leq N(f) e^{[C_s(\beta_1) - \beta_1(1-s)] |\mathcal{Y} \setminus X|} e^{|\mathcal{Y}| - \delta |X|} \\
 & \leq N(f) e^{[\tau + m_s(\beta_1, \delta)] |\mathcal{Y}|}
 \end{aligned}$$

wobei $m_s(\beta_1, \delta) = \max \{ C_s(\beta_1) - \beta_1(1-s), -\delta \}$

Da die Anzahl der Teilmengen $Y \subset \tilde{\mathcal{Y}}$ und $X \subset Y$ durch $e^{K|\mathcal{Y}|}$ mit einer geeigneten Konstanten $K > 0$ beschränkt ist, erhalten wir

$$\begin{aligned}
 & \sum_{Y \subset \tilde{\mathcal{Y}}} \sum_{X \subset Y} \sum_{\substack{n_2 \\ \text{supp } n_2 = \tilde{\mathcal{Y}} \setminus X}} |k_\lambda(n_2, Y, f, H)| \\
 & \leq N(f) e^{[\tau + K + m_s(\beta_1, \delta)] |\mathcal{Y}|}
 \end{aligned}$$

Nun setzen wir $\delta_0(M) := M + r + K$ und definieren $\beta_0(M, s)$ als Lösung von $(1-s)\beta - C_s(\beta) = M + r + K$. $\beta_0(M, s)$ ist eindeutig bestimmt, da $C_s(\beta)$ monoton fällt, mit $C_s(0) = \infty$ und $C_s(\infty) = \log 2$. Es folgt $m_s(\beta_1, \delta) \leq -M - r - K$, falls $\beta_1 \geq \beta_0(M, s)$ und $\delta \geq \delta_0(M)$, und damit die Behauptung. $\blacksquare$

Eine geeignete Norm, für die wir Lemma C1 anwenden können, ist die folgende

$$N_\xi(f) := \sup_{\substack{\pi_b \in [-\pi, \pi] \\ dn_2 = 0}} |f_0(A, n_2)| e^{-\xi \|n_2\|^2}$$

wobei wir $\xi > 0$ fest, aber beliebig klein wählen. $N_\xi(f)$ ist endlich, falls f polynomial beschränkt ist, da $n_1(n_2)$ so gewählt werden kann, daß $\|n_1(n_2)\|_\infty \leq \text{const.} \|n_2\|^2$ [Kennedy, King 1986].

Lemma C2:

Zu jedem $\delta > 0$ und $h > 0$ gibt es $e_0^2 > 0$ und $\mu_0 > 0$, so daß für alle $e \in \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{R}$ mit $\text{Re}(e^{-2}) \geq e_0^{-2}$ und $a > \mu_0 / |e|$ und für alle $H \in \mathcal{S}_\lambda^2(\mathbb{R})$ mit $\|H\|_\infty \leq h$ gilt

$$D W^H(A) f_0(A, n_2) \leq N(f) e^{(\beta + r) \|n_2\|^2} + r \|n_2\|^2$$

wobei $\beta = \pi^2 \text{Re}(e^{-2})$ und $r = 5 \log 2$

Nach der Formel (C2) gilt hiermit die Voraussetzung (C5) in Lemma C1 mit $\beta_1 = \beta - \varepsilon$ und $\beta_2 = 4\beta$. Falls $\|H\|_\infty \leq h < 1/4$ ist, können wir daher zu jedem $M > 0$ die Kopplungskonstanten β und $\alpha/|e|$ immer groß genug wählen, so daß die Polymeraktivitäten beschränkt sind durch $N_\xi(f) e^{-M|\gamma|}$, falls $\xi > 0$ klein genug ist. (Setze in Lemma C1 $s = 2h + 1/2$ und wähle $\varepsilon \leq \beta_0(M, s) (\frac{1}{2} - 2h)$, dann gilt $\|H\|_\infty \leq s(\beta - \varepsilon) / 4\beta = s\beta_1 / \beta_2$ falls $\beta \geq \beta_0(M, s)$).

Beweis Lemma C2:

Es gilt:

$$\begin{aligned}
 & |S_p(A, n_2)| \\
 &= \left| e^{\frac{\pi^2 n_2(p)^2}{e^2}} e^{\frac{dA(p)^2}{2e^2}} \left| e^{-\frac{(dA + \pi n_2)^2(p)}{e^2}} - e^{-\frac{(2\pi^2 n_2^2 + dA^2)(p)}{2e^2}} \right| \right| \\
 &\leq 2 e^{\beta n_2(p)^2} e^{(dA)^2(p)/2|e|^2}
 \end{aligned}$$

Für $n_2(p) = 0$ haben wir die schärfere Abschätzung

$$|S_p(A, n_2 = 0)| \leq \left| \frac{dA}{2e} \right|^2(p)$$

da $\operatorname{Re}(e^{-2}) > 0$. Nun verwenden wir $|f_0(A, n_2)| \leq N_\epsilon(f) e^{\epsilon \|n_2\|^2}$ und erhalten

$$\begin{aligned}
 & \left| \int D_\lambda W^H(A) f_0(A, n_2) e^Y \right| \\
 & \leq N_\epsilon(f) e^{(\beta+\epsilon)\|n_2\|^2} \int D_\lambda W^H \left[\prod_{p \in Y \setminus n_2} 2 e^{\frac{|dA|^2}{2e}} \right] \left[\prod_{p \in Y \setminus n_2} \left| \frac{dA}{2e} \right|^2 \right] \quad (C7)
 \end{aligned}$$

Als nächstes benützen wir

$$(dA)^2(p) \leq 4 \sum_{b \in \partial p} A_b^2$$

und multiplizieren dann das Produkt über $p \in Y \setminus n_2$ aus. Wir erhalten eine Summe über alle Konfigurationen $\zeta: p \rightarrow \zeta(p) \in \partial p, p \in Y \setminus n_2$, von Produkten der Form

$$\prod_{p \in Y \setminus n_2} \left| \frac{A(\zeta(p))}{e} \right|^2$$

Sei $j_\zeta(b)$ die Anzahl der Plaketten p mit $\zeta(p) = b$. Dann gilt $0 \leq j_\zeta(b) \leq 2(d-1)$ und $\sum_b j_\zeta(b) = |Y \setminus n_2|$, und es folgt

$$(C7) \leq N_\epsilon(f) e^{(\beta+\epsilon)\|n_2\|^2} 2^{|Y|} \sum_{\zeta} \int D_\lambda W^H e^{\frac{(d_\lambda A, d_\lambda A)_Y}{2|e|^2}} \prod_b \left| \frac{A(b)}{e} \right|^{2j_\zeta(b)}$$

Wenn wir jetzt noch abschätzen

$$(d \wedge A, d \wedge A)_Y \leq 4d \sum_{b \in \bar{Y}_1} A(b)^2$$

so faktorisiert das Integral, und es folgt schließlich

$$\leq N_\varepsilon(f) e^{(\beta+\varepsilon)\|n_2\|^2} 2^{|Y|} \sum_{\sigma} \prod_{b \in \bar{Y}_1} I_b^H(j_\sigma(b)) \quad (C8)$$

mit

$$I_b^H(j) = \int_{-\pi}^{\pi} D_{\{b\}} W^H(H) e^{2d \left| \frac{H}{\varepsilon} \right|^2} \left| \frac{H}{\varepsilon} \right|^{2j}$$

Nach einer Umskalierung $A \rightarrow A / |\varepsilon|$ können wir für $|\varepsilon|$ klein genug und $\mu := |a \varepsilon|$ in Abhängigkeit von $d^* H(b)$ groß genug I_b durch einen Gauß'schen Erwartungswert approximieren. Insbesondere können wir zu jedem $m > 0$ und $h > 0$ positive Konstanten ε_0 und μ_0 finden, so daß für alle ε und a mit $|e^{-2}| \gg \operatorname{Re}(e^{-2}) \geq \varepsilon_0^{-2}$ und $a \geq \mu_0 / |\varepsilon|$ sowie für alle H mit $\|H\|_\infty \leq h$ gilt:

$$I_b^H(0) \leq 2$$

$$\sup_{1 \leq j \leq 2(d-1)} I_b^H(j) \leq e^{-m}$$

Da jede Plakette 4 Bonds enthält, gibt es genau $4^{|Y \setminus n_2|}$ Konfigurationen σ . Wegen $\sum_b j_\sigma(b) = |Y \setminus n_2|$ gilt $|\operatorname{supp} j_\sigma| \geq |Y \setminus n_2| / 2(d-1)$, und es folgt:

$$\sum_{\sigma} \prod_{b \in \bar{Y}_1} I_b^H(j_\sigma(b)) \leq 4^{|Y \setminus n_2|} 2^{|\bar{Y}_1| - \frac{|Y \setminus n_2|}{2(d-1)}} e^{-m \frac{|Y \setminus n_2|}{2(d-1)}}$$

$$\leq 2^{4|Y|} e^{-\delta |Y \setminus n_2|} \quad (C9)$$

mit

$$\delta = \frac{m + \ln 2}{2(d-1)} - \ln 4$$

Aus (C8) und (C9) folgt schließlich die Behauptung. 

Anhang D

Dualitätstransformationen und Guth's Theorem

In diesem Anhang werden die Dualitätstransformationen Lemma 2.22 und Lemma 2.31 bewiesen sowie die allgemeinere Formulierung der Guth'schen Korrelationsungleichung (Lemma 2.23) und des Guth'schen Satzes (Satz 2.24) erörtert. Falls nicht anders vermerkt, sind die betrachteten Homologie- und Kohomologiegruppen der in diesem Anhang auftretenden endlichen Unterkomplexe $\Lambda \subset \Lambda^\infty$ immer als trivial vorausgesetzt. Die in allen Formeln auftauchende Normierungskonstante Z^{-1} ändert ohne explizite Erwähnung von Fall zu Fall ihre Bedeutung und ergibt sich aus dem Zähler durch Nullsetzen des jeweiligen Arguments. Die verwendeten Maße $D \dots$ sind normierte Haarmaße auf den Gruppen

$\Omega_\Lambda^\nu \equiv \Omega_\Lambda^\nu(U(1))$, und die Summen sind über alle ν -Formen $n_\nu \in \Omega_\Lambda^\nu(Z)$, die den spezifizierten Zusatzbedingungen genügen. Vorweg sei an die sog. Poisson-Summationsformel erinnert:

Lemma D1: Sei $\mu > 0$.

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-in\varphi} e^{-\frac{n^2}{2\mu}} = \sqrt{2\pi\mu} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{\mu}{2}(\varphi + 2\pi n)^2}$$

Beweis:

Beide Seiten haben die gleichen Fourier-Koeffizienten: Sei $k \in \mathbb{Z}$, dann gilt:

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi e^{ik\varphi} \sum_n e^{-\frac{\mu}{2}(\varphi + 2\pi n)^2} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\varphi e^{ik\varphi} e^{-\frac{\mu}{2}\varphi^2} \\ &= \sqrt{\frac{2\pi}{\mu}} e^{-\frac{k^2}{2\mu}} \end{aligned}$$



Beweis von Lemma 2.22:

Sei $F \in \Omega_{\Lambda}^2(2\pi\mathbb{Z})$.

$$\begin{aligned} W_{\Lambda, e^2}(F) &= Z^{-1} \int_{\Omega_{\Lambda}^3} DW \sum_{n_2} e^{-i(W, d_{\Lambda} n_2)} e^{-\frac{1}{2e^2} \|F + 2\pi n_2\|^2} \\ &= Z^{-1} \int_{\Omega_{\Lambda}^3} DW \sum_{n_2} e^{i(W, d_{\Lambda} n_2 - \frac{d_{\Lambda} F}{2\pi})} e^{-\frac{4\pi^2}{2e^2} \|n_2\|^2} \\ &= Z^{-1} \int_{\Omega_{\Lambda}^3} DW e^{i(d_{\Lambda}^* W, \frac{F}{2\pi})} \sum_{n_2} e^{-\frac{\beta}{2} \|d_{\Lambda}^* W + 2\pi n_2\|^2} \end{aligned}$$

In der letzten Gleichung wurde Lemma D1 benutzt. Lemma 2.22 folgt durch Umschreiben dieses Ausdrucks auf das duale Gitter. $\square$

Beweis von Lemma 2.31:

Falls Δ_{Λ} auf $\Omega_{\Lambda}^{\nu}(\mathbb{R})$ invertierbar ist, ist die ν -te Homologie und Kohomologie von Λ trivial. Im weiteren Beweis ist über die anderen Homologie- und Kohomologiegruppen von Λ nichts vorausgesetzt. Sei zunächst $1 \leq \nu \leq d-1$

$$\begin{aligned} & Z^{-1} \sum_{d_{\Lambda}^* n_{\nu} = 0} e^{i(n_{\nu}, h_{\nu})} \exp - \frac{1}{2} (n_{\nu}, (\Delta_{\Lambda} Q \Delta_{\Lambda})^{-1} n_{\nu}) \\ &= Z^{-1} \sum_{n_{\nu}} \int_{\Omega_{\Lambda}^{\nu-1}} DW_{\nu-1} e^{i(n_{\nu}, h_{\nu} - d_{\Lambda} W_{\nu-1})} e^{-\frac{1}{2} (n_{\nu}, (\Delta_{\Lambda} Q \Delta_{\Lambda})^{-1} n_{\nu})} \\ &= Z^{-1} \int_{\Omega_{\Lambda}^{\nu-1}} DW_{\nu-1} \sum_{n_{\nu}} e^{-\frac{1}{2} \|d_{\Lambda} W_{\nu-1} - h_{\nu} + 2\pi n_{\nu}\|_{(\Delta_{\Lambda} Q \Delta_{\Lambda})}^2} \end{aligned} \tag{D1}$$

wobei $\|\gamma\|_C^2 := (\gamma, C\gamma)$ bedeutet und eine offensichtliche Verallgemeinerung von Lemma D1 verwendet wurde. Nach Voraussetzung gilt $Q \operatorname{Im} d_{\Lambda}^* \subset \operatorname{Ker} d_{\Lambda}^*$ und $Q \operatorname{Im} d_{\Lambda} \subset \operatorname{Ker} d_{\Lambda}$ und daher

$$\Delta_\lambda Q \Delta_\lambda^* = d_\lambda d_\lambda^* Q d_\lambda d_\lambda^* + d_\lambda^* d_\lambda Q d_\lambda^* d_\lambda$$

Eingesetzt in (D1) ergibt dies nach einer Umbenennung $n_\nu \rightarrow -n_\nu$

$$(D1) = Z^{-1} \sum_{n_{\nu+1} \in E_\lambda^{\nu+1}(\mathbb{Z})} e^{-\frac{1}{2} \|d_\lambda h_\nu + 2\pi n_{\nu+1}\|^2_{(d_\lambda Q d_\lambda^*)}}$$

$$\int_{\Omega_\lambda^{\nu-1}} DW_{\nu-1} \sum_{d_\lambda n_\nu = n_{\nu+1}} e^{-\frac{1}{2} \|d_\lambda W_{\nu-1} - h_\nu - 2\pi n_\nu\|^2_{(d_\lambda d_\lambda^* Q d_\lambda d_\lambda^*)}}$$

Im zweiten Exponenten ändert sich nichts, wenn wir h_ν durch $d_\lambda d_\lambda^* \Delta_\lambda^{-1} h_\nu$ ersetzen. Da der Integrand für jedes feste $n_{\nu+1}$ als Funktion von $W_{\nu-1}$ periodisch, d.h. eine wohldefinierte, stetige Funktion auf $S_\lambda^{2-1}(U(1))$ ist, können wir eine Gruppentranslation $W_{\nu-1} \rightarrow W_{\nu-1} + d_\lambda^* \Delta_\lambda^{-1} h_\nu$ durchführen, die das Maß $DW_{\nu-1}$ invariant läßt. Es folgt, daß das W-Integral von h_ν unabhängig ist. Wenn wir einen speziellen Vertreter $m_\nu(n_{\nu+1})$ mit $d_\lambda m_\nu(n_{\nu+1}) = n_{\nu+1}$ wählen, so gilt $n_\nu = m_\nu(n_{\nu+1}) + n'_\nu$ mit $d_\lambda n'_\nu = 0$. Das gleiche Argument wie vorher zeigt daher, daß das Integral auch von $m_\nu(n_{\nu+1})$ und damit von $n_{\nu+1}$ unabhängig ist. Es faktorisiert also aus der Summe über $n_{\nu+1}$ heraus und kürzt sich mit dem entsprechenden Beitrag in Z^{-1} . Wir erhalten deshalb

$$= Z^{-1} \sum_{n_{\nu+1} \in E_\lambda^{\nu+1}(\mathbb{Z})} e^{-\frac{1}{2} \|d_\lambda h_\nu + 2\pi n_{\nu+1}\|^2_{d_\lambda Q d_\lambda^*}}$$

und damit die Behauptung. Für $\nu = 0$ gilt $d_\lambda^* n_\nu = 0$ immer, und wir können uns die Einführung des W-Integrals sparen. Statt dessen verwenden wir sofort die Poisson-Summationsformel sowie $\Delta_\lambda Q \Delta_\lambda^* = d_\lambda^* d_\lambda Q d_\lambda^* d_\lambda$ und erhalten die Behauptung. $\square$

Beweis von Lemma 2.23:

Nach Lemma D1 gilt

$$\begin{aligned} & Z_{\lambda, 4d\beta}^{XY}(h) / Z_{\lambda, 4d\beta}^{XY}(0) \\ &= Z^{-1} \int_{\Omega_\lambda^0} D\varphi \sum_{n_i} e^{i(d_\lambda \varphi + h, n_i)} e^{-\frac{\|n_i\|^2}{2(4d\beta)}} \end{aligned}$$

(D2)

Das γ -Integral liefert nun die Zwangsbedingung $d_{\Lambda}^* n_1 = 0$. Wegen $(4d)^{-1} \|n_1\|^2 \leq (n_1, \Delta_{\Lambda}^{-1} n_1)$ folgt durch eine Korrelationsungleichung von [Guth 1980]

$$\leq Z^{-1} \sum_{d_{\Lambda}^* n_1 = 0} e^{i(h, n_1)} e^{-\frac{1}{2\beta} (n_1, \Delta_{\Lambda}^{-1} n_1)}$$

Das zuvor bewiesene Lemma 2.31 (im Text S. 203) liefert mit $Q = \Delta_{\Lambda}^{-1}$

$$\begin{aligned} &= Z^{-1} \sum_{d_{\Lambda} n_2 = 0} e^{-\frac{\beta}{2} \|d_{\Lambda} h + 2\pi n_2\|^2} \\ &= W_{\Lambda, \beta^{-1}}(d_{\Lambda} h) \quad \square \end{aligned}$$

Diskussion von Satz 2.24:

Nach Gleichung (D2) gilt

$$\begin{aligned} \frac{Z_{\Lambda, \beta}^{XY}(h)}{Z_{\Lambda, \beta}^{XY}(0)} &= Z^{-1} \sum_{d_{\Lambda}^* n_1 = 0} e^{i(h, n_1)} e^{-\frac{\|n_1\|^2}{2\beta}} \\ &= Z^{-1} \sum_{d_{\Lambda}^* n_1 = 0} e^{i(d_{\Lambda} h, n_2(n_1))} e^{-\frac{\|n_1\|^2}{2\beta}} \end{aligned} \quad (D3)$$

Wobei $n_2(n_1) \in \Omega_{\Lambda}^2(Z)$ eine beliebige Lösung von $d_{\Lambda}^* n_2 = n_1$ ist. Dieser Ausdruck ist also eine periodische Funktion von $d_{\Lambda} h$, und wir dürfen in allen Abschätzungen $d_{\Lambda} h$ durch $d_{\Lambda} h + 2\pi m_2$ ersetzen, mit $m_2 \in \Omega_{\Lambda}^2(Z)$ beliebig. Dies erklärt das Infimum über $m_2 \in \Omega_{\Lambda}^2(Z)$ im Satz 2.24. Für β klein genug kann man nun eine Tieftemperaturentwicklung in den Anregungen $n_1 \neq 0$ durchführen. Polymere γ sind hierbei die Zusammenhangskomponenten von $\text{supp}(n_1)$.

Die Konvergenz der Entwicklung für den Logarithmus von (D3) ist in allen Dimensionen $d \geq 2$ gewährleistet, da es nur darauf ankommt, daß $n_2(n_1)$ mit $\|n_2(n_1)\|_\infty \leq \text{const} \|n_1\|_2$ und $|\text{supp } n_2(n_1)| \leq \text{const} |\Omega|^q$ gewählt werden kann [Guth 1980]. Die in Satz 2.24 angegebene Schranke folgt dann aus Seilers Beweis des Guth'schen Theorems [Seiler 1982]. Die dort beschriebene Entwicklung läßt sich aber auch sofort übertragen auf verallgemeinerte Systeme der Form (D3), in denen n_1 durch n_ν und $n_2(n_1)$ durch $n_{\nu+1}(n_\nu)$ ersetzt ist, mit $1 \leq \nu \leq d-1$. Die in [Brydges, Seiler 1986] detailliert ausgearbeitete Technik zur Konstruktion von $n_2(n_1)$ läßt sich problemlos auf den Fall $\nu > 1$ verallgemeinern, so daß auch $n_{\nu+1}(n_\nu)$ mit den zuvor angegebenen Eigenschaften konstruiert werden kann. Es folgen analoge Schranken wie in Satz 2.24, was im Beweisabschnitt von Theorem 2.30 zur spontanen Symmetriebrechung benützt wurde.

LITERATURVERZEICHNIS

- Aleksandrov P.S.: "Combinatorial Topology" Vol.2, Graylock Press,
Rochester N.Y., 1957.
- Anderson P.W.: Phys. Rev. 130 (1963) 439.
- Balaban T.: Commun. Math. Phys. 95 (1984) 17; *ibid* 109 (1987) 249,
und weitere dort angegebene Zitate.
- Balaban T., Imbrie J., Jaffe A.: Commun. Math. Phys. 97 (1985) 299.
- Balaban T., Brydges D., Imbrie J., Jaffe A.: Ann. Phys. 158 (1984) 281.
- Banks T., Myerson R., Kogut J.: Nucl. Phys. B129 (1977) 493.
- Barata J.C.A., Wreszinski W.F.: Commun. Math. Phys. 103 (1986) 637.
- Bernstein J.: Rev. Mod. Phys. 46 (1974) 7. S. auch [Coleman:
Erice lectures 1973].
- Börner G., Seiler E.: Adv. Space Res. 3 (1984) 441.
- Borgs C.: "Zufallsflächen und Clusterentwicklungen in Gitter-Yang-Mills Theorien",
Dissertation, Ludwig-Maximilians-Universität München, 1986.
- Borgs C., Nill F.: Nucl. Phys. B270 [FS 16] (1986) 92^(*).
- Borgs C., Nill F.: Commun. Math. Phys. 104 (1986) 349^(*).
- Borgs C., Nill F.: Phys. Lett B171 (1986) 289^(*).
- Borgs C., Seiler E.: Commun. Math. Phys. 91 (1983) 329.
- Brandenberger R.H.: Rev. Mod. Phys. 57 (1985) 1.
- Bricmont J., Fröhlich J.: Phys. Lett. 122B (1983) 73. Siehe auch Nucl. Phys.
B251 [FS 13] (1985) 517. "Statistical mechanical methods in particle
structure analysis of lattice field theories III: Confinement and bound
states in gauge theories ", ETH-Zürich Preprint 1986:

(*) Veröffentlicht mit Genehmigung des Dekans der LMU München vom 7.4.1986.

- Brydges D.: "A Short course on cluster expansions". In: K. Osterwalder, R. Stora (Hg.): "Critical phenomena, random systems, gauge theories" (Les Houches 1984), North Holland, Amsterdam 1986.
- Brydges D., Fröhlich J., Seiler E.: Ann. Phys. 121 (1979) 227.
- Brydges D., Fröhlich J., Seiler E.: Nucl. Phys. B152 (1979) 521.
- Brydges D., Seiler E.: J. Stat. Phys. 42 (1986) 405.
- Buchholz D., Fredenhagen K.: Nucl. Phys. B154 (1979) 226.
- Callaway D., Petronzio R.: Nucl. Phys. B277 (1986) 50.
- Callen H.B.: "Thermodynamics", John Wiley, New York-London-Sydney, 1960.
- Cheng T.P., Eichten E., Li L.F.: Phys. Rev. D9 (1974) 2259, S. auch [Gross, Wilczek 1973/74].
- Choquet-Bruhat Y., De Witt-Morette C., Dillard-Bleick M.: "Analysis, manifolds and physics", Revised edition, North Holland, Amsterdam-New York-Oxford, 1982.
- Coleman S.: Commun. Math. Phys. 31 (1973) 259.
- Coleman S.: "Secret Symmetries". In: A. Zichich (Hg.): "Laws of hadronic matter" (Erice 1973), Academic Press, New York-London 1975.
- Coleman S., Weinberg E.: Phys. Rev. D7 (1973) 1888.
- Dasgupta C., Halperin B.J.: Phys. Rev. Lett. 47 (1981) 1556.
- De Angelis G.F., de Falco D., Guerra F.: Phys. Rev. D10 (1978) 1624.
- DeGrand T.A., Toussaint D.: Phys. Rev. D22 (1980) 2478; D24 (1981) 466.
- Dirac P.A.M.: Canad. J. Phys. 33 (1955) 650.
- Dobrushin P.L.: Theor. Prob. Appl. 13 (1968) 197.
- Drühl K., Wagner H.: Ann. Phys. 141 (1982) 225.
- Ehrenfest P.: Proc. Akad. Amsterdam 36 (1933) 147; Comm. Leiden Suppl. N° 75b. S. auch [Keesom 1933].

- Elitzur S.: Phys. Rev. D12 (1975) 3978.
- Englert F., Brout R.: Phys. Rev. Lett. 13 (1964) 321.
- Erdélyi A.: "Asymptotic expansions", Dover Publ., New York 1956.
- Ezawa H., Swieca J.: Commun. Math. Phys. 5 (1967) 330.
- Federbush P.: Commun. Math. Phys. 107 (1986) 319.
- Federbush P.: "To Yang-Mills QFT, $d=4$, through Physe Cells by 93 or before",
Stempel auf den Veröffentlichungen von Federbush zum Thema: "A Phase-
Cell Approach to Yang-Mills Theory".
- Fetter A.L., Walecka J.D.: "Quantum Theory of Many-Particle Systems", McGraw
Hill, New York 1971.
- Fradkin E., Shenker S.: Phys. Rev. D19 (1979) 3682.
- Fredenhagen K., Marcu M.: Commun. Math. Phys. 92 (1983) 81; Phys. Rev. Lett. 56
(1986) 223.
- Fröhlich J., Marchetti J.P.: Europhys. Lett. 2 (1986) 933.
- Fröhlich J., Morchio G., Strocchi F.: Nucl. Phys. B190 [FS 3] (1981) 553.
- Fröhlich J., Park Y.M.: Commun. Math. Phys. 59 (1977) 131.
- Fröhlich J., Simon B., Spencer T.: Commun. Math. Phys. 50 (1976) 50.
- Fröhlich J., Spencer T.: Commun. Math. Phys. 82 (1982) 411.
- Ginibre J.: Commun. Math. Phys. 16 (1970) 310.
- Ginzburg V.L., Landau L.D.: Zh. Eksp. Teor. Fiz. 20 (1950) 1064; Englische
Übersetzung in: "Men of Physics: L.D. Landau", Vol. I, p. 138, Pergamon
Press, Oxford 1965.
- Glashow S.L.: Nucl. Phys. 22 (1961) 579.
- Glimm J., Jaffe A.: "Quantum Physics", Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1981.

- Goldstone J., Salam A., Weinberg S.: Phys. Rev. 127 (1962) 965
- Gribov V.N.: Nucl. Phys. B139 (1978) 1.
- Gross D.J., Wilczek F.: Phys. Rev. D8 (1973) 3633; D9 (1974) 980.
- Guillemin V., Pollack A.: "Differential Topology", Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1974.
- Guralnik G., Hagen C., Kibble T.: Phys. Rev. Lett. 13 (1964) 585.
- Guth A.H.: Phys. Rev. D21 (1980) 2291.
- Hasenfratz A., Hasenfratz P.: "The continuum limit of a SU(2) gauge theory with a scalar doublet", Florida State University preprint FSU-SCRI-86-30 (1986).
- Higgs P.W.: Phys. Lett. 12 (1964) 132; Phys. Rev. 145 (1966) 1156. S. auch [Englert, Brout 1964, Guralnik et al. 1964].
- Hocking J.G., Young G.S.: "Topology", Addison-Wesley, Reading, MA., 1961.
- Iliopolous J., Itzykson C., Martin A.: Rev. Mod. Phys. 47 (1975) 165.
- Itzykson C., Zuber J.: "Quantum Field Theory", McGraw-Hill, New York 1980.
- Jackiw R.: Phys. Rev. D9 (1974) 1686.
- Janke W., Kleinert H.: Nucl. Phys. B270 [FS 16] (1986) 135.
- Jansen K., Jersák J., Lang C.B., Neuhaus T., Vones G.: Phys. Lett. 155B (1985) 268; Nucl. Phys. B265 [FS 15] (1986) 129.
- Jersák J.: "Lattice Higgs Models", In: B. Bunk, K.H. Mütter, K. Schilling (Hg.): "Lattice gauge theory - A challenge in large-scale computing" (Wuppertal 1985), Plenum Press, 1986.
- Jersák J., Lang C.B., Neuhaus T., Vones G.: Phys. Rev. D32 (1985) 2761.
- Jersák J., Neuhaus T., Zerwas P.M.: Nucl. Phys. B251 [FS 13] (1985) 299.

- Jona-Lasinio G.: Nuovo Cimento 34 (1964) 1790.
- Kastler D., Robinson D., Swieca J.: Commun. Math. Phys. 2 (1966) 108.
- Keesom W.H.: Proc. Akad. Amsterdam 36 (1933) 147, Comm. Leiden N° 75a.
- Kennedy T., King C.: Commun. Math. Phys. 104 (1986) 327.
- Kibble T.W.B.: Phys. Rev. 155 (1967) 1554.
- Kincaid J.M., Cohen, E.G.D.: Phys. Rep. 22 (1975) 57.
- King C.: Commun. Math. Phys. 104 (1986) 675.
- King C., Yaffe L.G.: Commun. Math. Phys. 108 (1987) 423.
- Kleinert H.: Lett. Nuovo cimento 35 (1982) 405; Phys. Lett. 128B (1983) 69.
- Kondo K.-I.: Progr. Theor. Phys. 74 (1985) 152.
- Kubo J., Sibold K., Zimmermann W.: Nucl. Phys. B259 (1985) 331.
- Landau L.D., Lifshitz E.M.: "Statistical Physics", Pergamon Press, London-Paris, 1959.
- Lanford O., Ruelle D.: Commun. Math. Phys. 13 (1969) 194.
- Langguth W., Montvay I., Weisz P.: Nucl. Phys. B227 (1986) 11-49.
- Lee B.W.: Phys. Rev. D5 (1972) 823.
- Linde A.D.: JETP Lett. 23 (1976) 64.
- Mazenko G.F., Unruh W.G., Wald, R.M.: Phys. Rev. D31 (1985) 273.
- McBryan O., Spencer T.: Commun. Math. Phys. 53 (1977) 299.
- Meissner W., Ochsenfeld R.: Naturwiss. 21 (1933) 78.
- Mermin N.D.: J. Math. Phys. 8 (1967) 1061.
- Mermin N.D., Wagner H.: Phys. Rev. Lett. 17 (1966) 1133.

- Messenger A., Miracle-Sole S., Pfister C.: Commun. Math. Phys. 58 (1978) 19.
- Münster A.: "Statistical Thermodynamics", Vol.I § 4.5/6, Springer, Berlin-Heidelberg-New York 1969.
- Nambu Y.: Phys. Lett. 26B (1968) 626.
- Nilf F.: Max-Planck-Inst. Preprint MPI-PAE/PTh 39/85; "Faddeev-Popov trick and loop expansion in the presence of Gribov copies - A differential geometric survey", Vortrag gehalten auf der XV. Int. Conf. Diff. Geom. Methods, Clausthal 1986 (erscheint im Konferenzbericht).
- Osterwalder K., Seiler, E.: Ann. Phys. 110 (1978) 440.
- O'Rai feartaigh L., Wipf A., Yoneyama H.: Nucl. Phys. B271 (1986) 653.
- Peskin M.E.: Ann. Phys. 113 (1978) 122.
- Polyakov A.: Phys. Lett. 72B (1978) 477.
- Pfister C.E.: Commun. Math. Phys. 86 (1982) 375.
- Ramond P.: "Field Theory - A Modern Primer", Reading et al., Benjamin/Cummings 1981.
- Roepstorff G.: "A variational principle for euclidean fields", Preprint RWTH Aachen 1985.
- Salam A.: In "Elementary Particle Theory", N. Svartholm (Hg.), Almquist and Wiksells, Stockholm 1969.
- Savit R.: Phys. Rev. Lett. 39 (1977) 55.
- Seiler E.: "Gauge theories as a problem of constructive quantum field theory and statistical mechanics", Lecture Notes in Physics 159, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1982.
- Seiler E.: "The confinement problem", Vortrag auf der Konferenz "Quark confinement and liberation: Numerical results and theory", Berkeley 1985.
- Slade G.: Commun. Math. Phys. 104 (1986) 573.

- Straumann N.: "Thermodynamik", Lecture Notes in Physics 265, Springer, Berlin-Heidelberg-New York 1986.
- Strocchi F.: Commun. Math. Phys. 56 (1977) 57.
- Strocchi F., Wightman A.S.: J. Math. Phys. 15 (1974) 2198.
- Swieca J.A.: Phys. Rev. D13 (1976) 312.
- Symanzik K.: Commun. Math. Phys. 16 (1970) 48.
- Szlachányi K.: Commun. Math. Phys. 108 (1987) 319.
- 'tHooft G.: Nucl. Phys. B138 (1978) 1; B153 (1979) 141.
- Ullmaier U.: Comments in Solid State Physics 5 (1973) 81.
- Wegner F.: J. Math. Phys. 12 (1971) 2259.
- Weinberg S.: Phys. Rev. Lett. 19 (1967) 1264.
- Weinberg S.: Phys. Rev. Lett. 36 (1976) 294.
- Wightman A.: Einführung zum Buch: "Convexity in the Theory of Lattice Gases", von R.B. Israel, Princeton University Press, Princeton, N.J. 1979. S. auch [Straumann 1986].

DANKSAGUNG

Es fällt mir an dieser Stelle schwer, die richtigen Worte zu finden, um meinem Betreuer, Erhard Seiler, zu danken. Viel wichtiger noch als seine fachliche Kompetenz und seine schnelle Auffassungsgabe für die Probleme eines "Querdenkers" war für mich seine Fähigkeit zu motivieren, zu trösten und zu helfen wo "Not am Mann" ist. Ohne seine ständige Bereitschaft zuzuhören und mitzudenken, wäre diese Arbeit auch nicht andeutungsweise so weit gediehen, wie sie nun vorliegt.

Weiter danke ich meinem Freund Christian Borgs für die wissenschaftliche Zusammenarbeit in vielen Detailfragen und dafür, daß er mir die Geheimnisse der Korrelationsungleichungen und Clusterentwicklungen so lange 'vorgebetet' hat, bis ich sie selbst 'nachplappern' konnte.

Mein Dank für diverse nützliche Diskussionen gilt auch Christoph Bruder, Klaus Fredenhagen, Jürg Fröhlich, Krzysztof Gawedzki, Chris King, Pierre-Alberto Marchetti, Konrad Müller, Lon Rosen und Gordon Slade. Außerdem danke ich meinen Zimmerkollegen, Dieter Düsedau und Georg Raffelt, für die angenehme Nachbarschaft während meiner Zeit am MPI.

In diesem Zusammenhang möchte ich mich auch bei der Max-Planck-Gesellschaft für die großzügige finanzielle Unterstützung bedanken, und insbesondere bei Hans-Peter Dürr und Wiltrud Huber, die mich beide freundschaftlich unterstützt haben, wo immer es nötig war. Darüberhinaus möchte ich auch Peter Breitenlohner, Dieter Maison, Irmgard Kraus und Julia Paxon, stellvertretend für viele am Institut, für die lockere und kameradschaftliche Atmosphäre danken, die mir sicher für immer wehmütig in Erinnerung bleiben wird.

Schließlich bedanke ich mich noch einmal ganz besonders herzlich bei Julia Paxon, die in mühsamer und aufopferungsbereiter Kleinarbeit das Manuskript getippt hat, und zwar auch noch während der Zeit, wo ich eigentlich schon in Zürich war.

Lebenslauf

Ich wurde am 19. August 1955 als erstes von vier Kindern des Diplom-Kaufmanns Dr. Richard Nill und der Krankengymnastin Barbara Nill, geb. Mehnert, in Augsburg geboren.

Von September 1961 bis Juli 1965 besuchte ich die Volksschule "Am roten Tor" in Augsburg und ab September 1965 das "St. Anna Gymnasium" mit neusprachlichem Zweig, wo ich im Mai 1975 das Abitur ablegte. Das Schuljahr 1972/73 verbrachte ich als AFS-Stipendiat bei einer Gastfamilie in Sutherlin/Oregon (USA). Während dieser Zeit besuchte ich als "Senior" die "Sutherlin High School" und absolvierte das amerikanische "High school diploma".

Im November 1975 begann ich das Studium der Physik und Mathematik an der Ludwig-Maximilians-Universität München. Meine Diplomarbeit in Physik mit dem Titel: "Klassische Yang-Mills Feldtheorien mit äußeren Ladungen" fertigte ich unter der Leitung von Prof. Dr. S. Schlieder in der Zeit von Herbst 1980 bis Frühjahr 1982 am Max-Planck-Institut für Physik und Astrophysik in München an. Das Diplom in Physik legte ich im August 1982 und das 1. Staatsexamen in Mathematik/Physik für das Lehramt an Gymnasien im Frühjahr 1984 ab.

Von September 1982 bis September 1986 arbeitete ich als Doktorand von Dr. E. Seiler weiterhin am Max-Planck-Institut. Im November 1984 hatte ich einen Forschungsaufenthalt an der "University of Virginia" in Charlottesville, Va., und von Mai bis Juni 1985 ein DAAD-Stipendium an der Universität von Princeton. Seit Oktober 1986 habe ich ein Stipendium des "Schweizerischen Nationalfonds zur Förderung der Wissenschaften" am Forschungsinstitut für Mathematik der ETH Zürich unter der Betreuung von Prof. Dr. K. Osterwalder.

